建築基礎の設計施工に関する研究資料4、液状化地盤における基礎設計の考え方、日本建築学会構造委員会基礎構造運営委員会編、日本建築学会、pp. 47-92、1998

有効応力解析は実挙動をどれだけシミュレートできるか

1 はじめに

結論からいうと，筆者は地震応答解析や有効応力解析は地震時の地盤の挙動を求めるのに非常に有力な武器であり，十分実挙動をシミュレートできる能力を持っていると考えている．しかし，一方では，そのためには，非常な経験と工学的判断力が必要であるとも考えている．有効応力解析は，特に構成則の不備が原因で，どんな問題でも解けるというものでもない．筆者が現在感じている有効応力解析のレベルは，次のようなものである．「観測記録，地震被害などの実現象をシミュレートするように努力する．この場合には結果が分かっているので，パラメータを調整するなどしてそれに合うように出来る．そして，もし，ある問題に対して満足する答えが得られたなら，それと同じ様な問題に対しては，未知の問題でも満足する結果を得ることが期待できる」　すなわち，ある問題に対して成功したとしても，同じ手法でタイプの異なる問題に関しては成功するとは限らないというのが現状である．

このことは，有効応力解析に対してだけではなく，全応力地震応答解析に対しても言える．この証拠として，これまでに行われたブラインドテスト（例えば文献1，2，3）の結果を見れば，あるプログラムが常に良い結果を得るということも無かったし，多くのプログラムの結果が非常に良く似ている（従って，どのプログラムを使っても同じ様な結果を得ることが出来る）と言うことも無かったと言うことを挙げることが出来る．また，同じプログラムを使っているが，応募者によって結果が非常に異なっているということも起こっている．

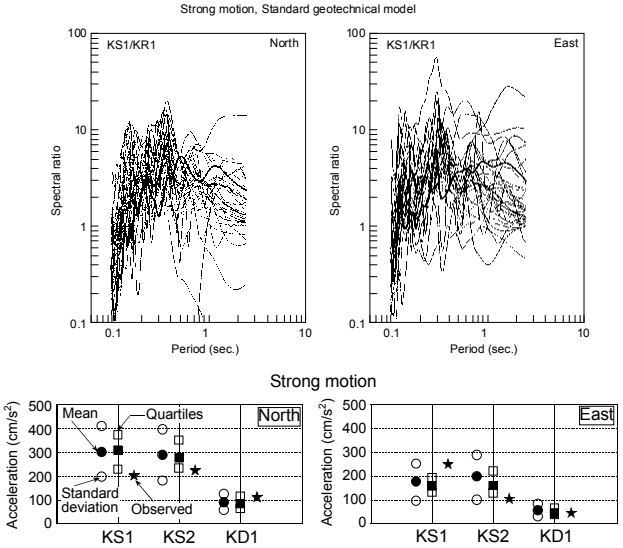


図-1.1　全応力解析によるブラインドテスト

例えば，図-1.1は全応力解析のブラインドテストの結果[2)]を示している．ブラインドテストに応募するからにはそれなりに応募者は自信があるはずである．しかし，結果を見ると，そのばらつきは驚くほどである．

図-1.2は有効応力解析での一斉解析[4)]（結果を他の人の結果を見ながら調整できる）で得られた地表の加速度時刻歴の結果である．これらの加速度時刻歴が全て同じで，従ってどの解析を使ったとしても同じ結果が得られると考える人はいないであろう．

問題は，この様な結果をネガティブに捉えるか，ポジティブに捉えるかと言うことである．ネガティブ捉えれば，だから地震応答解析は実用的ではないと言うことになる．しかし，もう少し考えて頂きたい．最初のブラインドテストについていえば，結果が分かっているとすれば，大きくはずれた結果を応募したであろうか？　合わせるために，自分の方法のどこが悪いのかを検討し，合わせるためにはどのようにすれば良いかを学ぶであろう．従って，次の同じ様な問題に遭遇したとき，この教訓を

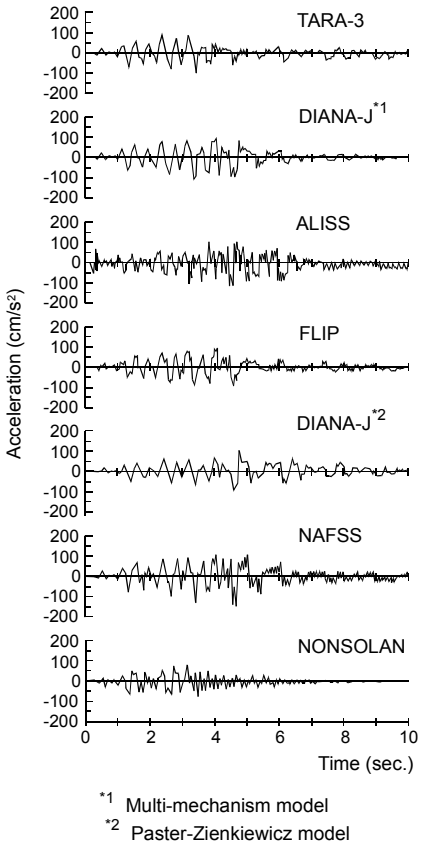


図-1.2　一斉解析における加速度時刻歴

生かし，よりよい結果を得ることが出来るであろう．二つ目の一斉解析についていえば，客観性にこだわった（例えば液状化強度を広い繰返し数の範囲で合わせるように材料パラメータを決める）事もあり，必ずしも特定の地盤，地震波をターゲットにしたとき最善の解であると言うことが言えないということも考えられる．また，この経験を生かし，多くの構成則が改良されてきている[5]．

世の中の地震応答解析に関する論文は，ごく一部の例外を除いて，実験や観測と合わなかったという報告はほとんど無く，合ったというものばかりである．しかし，ブラインドテストの結果を見ると，これが幻想であることは明らかである．もし，計算が合わなければ，それは論文には書かれないと言うことに注意が必要である．また，表面的に論文に書かれないところでも結果を調整することは可能である．従って，同じプログラムを使って，別の人が独立に解析を行ったからといって，同じ結果を得ることも出来ないことも普通である．

地震応答解析と言えば，SHAKE による全応力解析が実務では最も一般的である．これに比べれば，有効応力解析は格段に難しい．データを作るためのモデル化，結果に対する判定など多くのところで判断が要求される．ここで，頼れるのは，解析者の技術力と判断力である．そして，先に述べたように，自分で解いてみて満足のいく解が得られたとき，それと類似した問題に対してのみ，未知の問題で信頼のある結果を得ることが出来るというのが，現在の状態である．

この報告では，まず．有効応力解析の理論などについて一般的な説明をする．特に，有効応力解析の考え方，使い方の難しい構成則については詳細に説明する．また，その前提として全応力解析にも触れる．その後，何故有効応力解析が難しいのか，実際の解析でどのような点に注意しなければならないかという様なことを説明し，技術者の判断能力の向上に寄与したいと考えている．

2 土の挙動とそのモデル化

土の動的な性質については，この報告の前にある「地震応答解析に用いる地盤物性」で詳細に示した．重複を避けるため，これに示したことは原則としてこの報告には載せないことにする．従って，前の報告を引用する機会も多くなる．その際には，「地震応答解析に用いる地盤物性」として示すことにする．

2.1 土質力学の特殊事項

地盤を構成している土は均質な材料というわけではない．図-2.1に示すように，土粒子が集まり骨格構造を形成している．また，間隙は空気や水で満たされている．

土質力学は力学の一種であるが，この様な土の材料としての特殊性のため一般力学や弾性学などと少し異なるところがある．

(1) 有効応力の原理

土質力学では，土の強度や剛性と言った材料特性が有効応力に支配されるされる事から有効応力の概念は非常に重要である．これを有効応力の原理という[7]．

土は単一の物質ではなく，土粒子とその間を埋める間隙物質との混合体である．図-2.2に，間隙が水で飽和している土の微小要素に作用する応力を示す．応力σ_{ij}（全応力と呼ぶ）は，土粒子に作用する応力と水に作用する応力に分けることが出来，次のように書ける．

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij} p \qquad (2.1)$$

ここで，δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．式(2.1)の右辺の第1項，すなわち土粒子に作用する応力を有効応力，第2項，すなわち間隙水に作用する応力を間隙水圧という．有効応力には，式(1)にσ'_{ij}として示すように，「'」をつけるのが慣例である．せん断応力に関しては，全応力も有効応力も同じである．また，間隙が空気である場合は，全応力と有効応力は同じである[1]．

土は図-2.2に示したように，土粒子が骨格構造を形成しているのが特徴である．図-2.2の右辺第1項の微小要素に作用する応力は，土粒子の形状そのものを変化させると共に，土粒子の骨格構造を変化させるが，前者は骨格構造の変化にくらべほとんど無視できる．つまり，有効応力とは，土の骨格構造を変化させる応力である．

多くの構成則では，剛性や強度は式(2.2)で定義される有効拘束圧依存しているとしているが，ものによっては

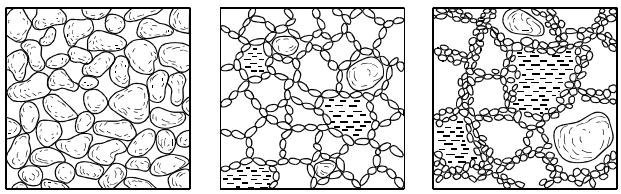


図-2.1　土の骨格構造の例[6]

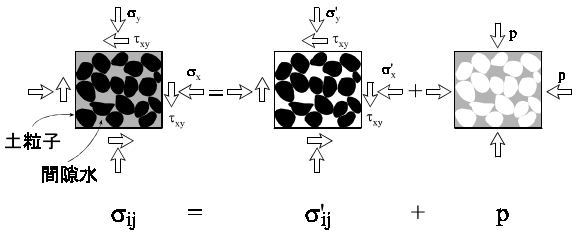


図-2.2　有効応力と間隙水圧の定義

[1] だたし，粘土では負の間隙水圧が作用することもある．ここでは，通常の液状化解析の条件，つまり砂についての議論である．

主応力に依存するという報告もある．

$$\sigma'_m = \frac{1}{3}(\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z) \tag{2.2}$$

また，一次元解析や実験式では有効上載圧 σ'_v に依存しているとしているものもある．

(2) ダイレタンシー

ダイレタンシーはせん断変形に伴って体積変化が発生する減少で，土のような粒状体独特の現象である．特に液状化の問題では，ダイレタンシーは非常に重要である．これについては，「動的応答解析に用いる地盤物性」に示したので，ここでは省略する．

2.2 土の変形挙動の基本的な考え方

土（骨格）の変形挙動は，せん断変形，体積変化，ダイレタンシーに分けて考えるのと理解しやすい．さらに，間隙に水があるときには，その挙動，特に水が土の中を流れるのか（排水条件），流れないのか（非排水条件）ということも問題となる．

(1) せん断変形

図-2.3は繰返しせん断応力を受ける土の挙動の例である．図から，土の応力－ひずみ関係は非常に非線形性が強いことが分かる．従って，地震応答解析では，非線形性の考慮は必須の事項である．

もう一つ着目されるのは，排水条件と非排水条件で挙動が全く異なることである．これは砂のダイレタンシー挙動と関係している．すなわち，排水条件下ではダイレタンシーのため体積減少が起こり，砂が密になるため，剛性や強度が増加しているのに対し，非排水条件では体積変化が許されないので，過剰間隙水圧が発生し，有効応力が減少するため，剛性や強度が低下しているわけである．

(2) 体積変化

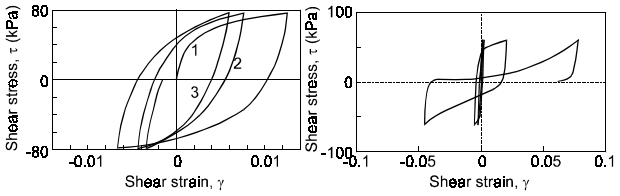
土の体積変化を伴う挙動は，間隙比 e と有効拘束圧 σ'_m の関係として表されることが多い．図-2.4はこの関係の例である．横軸が対数軸となっているのは，関係が直線的に表されるからである．埋立土を例として図-2.4(c)に沿って体積変化の挙動を見ることにする．埋立前の状態では，応力はほとんど0である．この状態を図-2.4の A とする．埋め立てられると上から押されるので有効拘束圧が増加し，対応して体積圧縮が生じ間隙比が小さくなり，状態点は A→B→D の様に移動する．この過程は非可逆的である．ここで，たとえばできあがった地盤を掘削する等して，B 点で一旦拘束圧を小さくすると状態点は A の方向には戻らず，C の方向に移動する．C 点で再び有効拘束圧を増加させると，以前の経路をたどり，B 点に達し，その後，D 点に向かう．B→C→B の過程では若干のヒステリシスを描くが，多くの構成則では可逆的としている．地盤を盛り立てたり，構造物を作ったりする場合には拘束圧が増加するが，地震応答で扱う範囲では，有効拘束圧が増加するケースはほとんどないので A→B→D の挙動は考える必要はない．A→B→D の過程は正規圧密過程と呼ばれ，これに対し B→C 過程は体積が現象する過程で膨潤過程と呼ばれ，また，正規圧密に対して過圧密状態と呼ばれる．一方 C→B は再載荷曲線と呼ぶ．膨潤曲線と再載荷曲線が一致する場合には両者は区別せず膨潤曲線と呼ばれることもある．過圧密状態では体積ひずみ増分 $d\varepsilon_v = d\varepsilon_x + d\varepsilon_y + d\varepsilon_z$ と拘束圧の関係は次のように表される．

$$d\sigma'_m = K d\varepsilon_v \tag{2.3}$$

ここで，K は体積弾性係数である．また，この逆数は体積圧縮係数と呼ばれ，m_v の記号で表される．膨潤曲線は可逆的であるが，係数 K は有効拘束圧の関数であるので，この関係を増分弾性と呼ぶこともある．一次元解析では，一次元体積圧縮係数 $\overline{m}_v$ が使われることがある．一次元の体積変化が起きるときは同時にせん断変形も起こるので，$\overline{m}_v$ は次のように求められる．

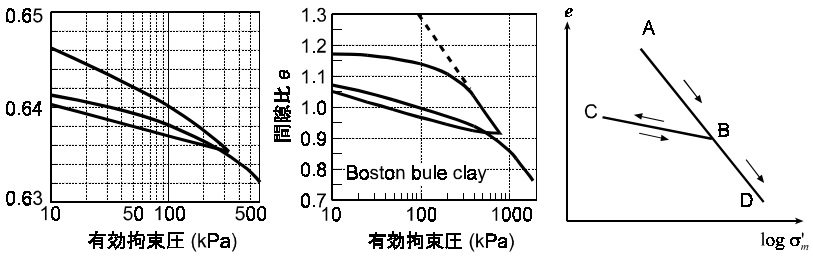
$$\overline{m}_v = 1/(K + \frac{4}{3}G) \tag{2.4}$$

$e - \log\sigma'_m$ 平面上で，膨潤曲線を直線とすると，体積弾性係数 K は有効拘束圧に比例する．構成則では，この関



(a) 排水試験　　(b) 非排水試験

図-2.3　繰り返しせん断を受ける砂の挙動の例[8)]



(a) 砂[9)]　　(b) 粘土[9)]　　(c) 挙動の模式図

図-2.4　土の体積変化特性

係を使っているものもあるし，拘束圧のべきに比例するとしているものもある．これについては，前の章で述べている．

(3) ダイレタンシー

ダイレタンシーのメカニズムについては既に紹介した．メカニズムから考え，ダイレタンシーの量がせん断ひずみ増分に依存することは明らかであるが，そのほかに応力比にも依存する．よく用いられる関係は三軸試験の結果を基にした次の式で，応力－ダイレタンシー関係と呼ばれる．

$$\frac{d\varepsilon_{vd}}{d\gamma} = \mu - \frac{q}{\sigma'_m} \tag{2.5}$$

ここで，$d\varepsilon_{vd}$はダイレタンシーにより生じた体積ひずみ増分，$d\gamma$はせん断ひずみ増分，q は軸差応力である．また，μは材料に固有の定数で変相時の応力比と呼ばれる．τ-σ'_m 平面上で変相位置を繋ぐと直線になり，これを変相線，また，そのσ'_m軸となす角度を変相角と呼ぶ．これについては図-7.4を参照されたい．

また，これ以外にも多くの実験式も提案されている．これについては，次節でその幾つかを示す．

(4) Darcy の法則と透水係数

間隙水が流れるとき，流速 $\dot{w}$ と流れる方向の水頭 h の変化量の間を関係付ける式で，次のように表される．

$$\dot{w} = -k\frac{dh}{ds} \tag{2.6}$$

ここで，s は流れの方向に取った座標である．比例係数 k は透水係数と呼ばれ，その代表値は「地震応答解析に用いる地盤物性」で示した．h は水頭である．水頭は水理学と同様定義であり，次のように表され，右辺の各項は圧力水頭，位置水頭，速度水頭と呼ばれる．

$$h = \frac{p}{\gamma_w} + z + \frac{\dot{w}^2}{2g} \tag{2.7}$$

ここで，γ_wは水の単位体積重量，z は鉛直方向の座標，g は重力加速度である．

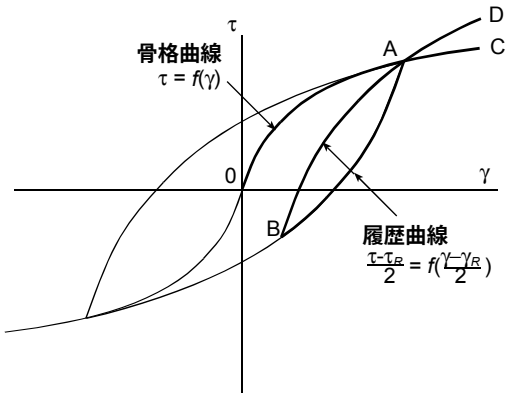


図-2.5　骨格曲線と履歴曲線

2.3　有効応力解析に用いられる構成則

この節では，有効応力解析に用いられる構成則（応力－ひずみ関係）の基本的な考え方を紹介する．

(1) 骨格曲線と履歴曲線

多くの構成則では，土が最初に経験する応力（比）に対する挙動と除荷，再載荷を行うときの挙動を区別することが普通である．つまり，図-2.5に示すように，最初の載荷 O→A→C と，A 点で除荷して以降の挙動 A→B や B 点で再載荷した挙動 B→A を区別するわけである．ここでは，前者を処女載荷時の挙動，後者を履歴挙動と呼ぶ事にする．また，この結果得られる履歴関係を，それぞれ骨格曲線，履歴曲線と呼ぶ．

多くの構成則では，骨格曲線を定義するには非常な努力が払われているが，履歴曲線は割合簡単に作っている．つまり，履歴曲線に Masing 則を適用することで，履歴曲線を作る．

図-2.5の A 点で除荷が起こったとする．このとき，骨格曲線をひずみの関数として

$$\tau = f(\gamma) \tag{2.8}$$

と表したとすれば，履歴曲線は，これと相似形に

$$\frac{\tau - \tau_R}{2} = f\left(\frac{\gamma - \gamma_R}{2}\right) \tag{2.9}$$

で表す．ここで，$(\gamma_R \quad \tau_R)$ は除荷点 A に座標である．式(2.9)は除荷点を通り，骨格曲線を2倍した曲線である．Masing 則そのものは特に2倍と限っているわけではないが，実用的には2倍が多く使われている．

Masing 則を使って履歴曲線を作ると，不都合になることが一つある．それは，図-2.5で A 点で除荷し，A→B→A と元の点に戻ってきた時である．このとき，除荷曲線の延長は B→A→D である．しかし，これをそのまま適用すると，例えば A→B が無限小であったとすれば，無限小の除荷が起こった時（O→A→D）と起こらないとき（O→A→C）で挙動が全く異なってしまう事になる．これは不自然である．そこで，通常 Masing 則というときには，もう一つのルールを付け加える．すなわち，以前の除荷点に達したときは，以前の骨格曲線や履歴曲線の上を動く事にする．

次項に示すように，Masing 則は，実現象と対応していない．単に数学上，ないしはモデルを作る上での便宜上導入された法則である．しかし，適用範囲を限るとか，パラメータの選定に留意すればかなり実用的にも使える法則である．

これまでの説明では一次元挙動を対象とした．多次元の解析でも Masing 則は多く使われる．多次元のモデルは後に説明するが，硬化関数に対して Masing 則が使われる．

この際, 図-2.5で示したようなひずみは意味をなさない方が多いので，除荷点の判断は応力で行われる．これは，弾塑性応答を考えると自然なことで，むしろ一次元の問題でひずみで定義したのが不自然な表現法である．もちろん一次元の問題では，拘束圧の変化を考えない，全応力解析（4.3節参照）ではひずみで定義しても応力で定義しても結果は同じとなる．

なお，Masing 則の二つ目のルールを用いると，除荷点ひずみ（応力，応力比）の座標を逐次記憶していく必要がある．このためには多くの記憶領域が必要であることから，多次元の問題では，二つ目のルールを使わないケースも多い．また，論文には明瞭に書いていないものも多い．一般に構成則に関する論文ではその検証のための例題は非常に単純なものに対して行われることから，解析結果を見るだけでは判断できないことも多い．

(2) 一次元全応力解析で多用される構成則

一次元全応力解析では，水平面に作用するせん断応力τとせん断ひずみγの関係のみが必要となる．このケースでは，後に示すような弾塑性論に基づく構成則は用いられず，τ-γ関係を直接関数形で表す．良く用いられるのは，次の二つである．

①双曲線モデル

骨格曲線に双曲線型の式

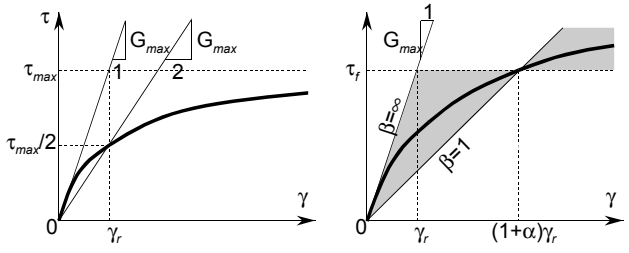
$$\tau = \frac{G_{max}\gamma}{1+G_{max}\gamma/\tau_{max}} \tag{2.10a}$$

を用いる．履歴曲線に Masing 則を用いると減衰は次のようになる．

$$h = \frac{4}{\pi}\left(1+\frac{\gamma_r}{\gamma}\right)\left[1-\frac{\gamma_r}{\gamma}\ln\left(1+\frac{\gamma}{\gamma_r}\right)\right]-\frac{2}{\pi} \tag{2.10b}$$

日本では, このモデルは（修正, 履歴型）Hardin-Drnevich モデルと呼ばれる事が多い．これは，国生ら[10]がこのモデルを Modified Hardin-Drnevich モデルと紹介した事から始まっている．しかし，一般的には双曲線モデル（hyperbolic model）という名前が既に存在しているし[11]，使われていた（例えば文献12）．誰かが使うとそれをまねする日本人に多い傾向が現れた結果である．

図-2.6に骨格曲線の特徴を示す．なお，モデルの特長については，例えば文献13に示したので参照されたい．



(a) 双曲線モデル　　(b) Ramberg-Osgood モデル

図-2.6　一次元モデルの骨格曲線

②Ramberg-Osgood モデル

骨格曲線に次式を用いる．

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{max}}\left[1+\alpha\left(\frac{\tau}{\tau_f}\right)^{\beta-1}\right] \tag{2.11a}$$

Masing 則を適用すると減衰は次のようになる．

$$h = \frac{2}{\pi}\frac{\beta-1}{\beta+1}\left(1-\frac{G}{G_{max}}\right) \tag{2.11b}$$

なお，原論文14)ではβは整数であったが，現在では実数で使われている．これを明瞭にするために前に修正の文字を付けることがある．

図-2.6に骨格曲線の特徴を示す．βの選び方により図の塗りつぶし部の部分の中で曲線の形状を変えることが出来ることから，適用性が広い．

「地震応答解析に用いる地盤物性」で示したように，土の動的変形特性を最初にモデル化したのは Hardin と Drnevich である[15]．この際，彼らのモデル化は今でも実験データの整理法によく使われることを述べた．これと比べると，双曲線モデルは骨格曲線，Ramberg-Osgood は減衰特性が同じである．これが，これら二つのモデルが多く用いられる理由である．また，このことは，Masing 則が実現象と対応していないことを明瞭に示している．

古い時代には，ばねとスライダーでモデル化するモデル，bilinear，trilinear モデルなども用いられ，現在でも基本的な研究には用いられることもあるが，実務では用いられないことから，ここではこれらのモデルについては述べない．

(3) 一次元有効応力解析に用いられるモデル

一次元有効応力解析として日本で多く用いられているのは，DESRA[12]と YUSAYUSA[16]である．前者は一番最初の有効応力解析で実績もあり販売もされている．後者は筆者らがソースを公開している．ここでは，この二つについて主に説明する．これらのモデルはいずれも応力－ひずみ関係に双曲線モデルを用い，過剰間隙水圧の発生の考慮方法のみが異なる．

①DESRA

乾燥状態で繰返し単純せん断を作用させると，ダイレタンシーのため体積が減少する．これを，次のようにモデル化する．

$$\Delta\varepsilon_{vd} = C_1\gamma - C_2\varepsilon_{vd} + \frac{C_3\varepsilon_{vd}^2}{\gamma+C_4\varepsilon_{vd}} \tag{2.12}$$

非排水状態では，この体積ひずみの代わりに過剰間隙水圧が発生するが，これは，上記体積ひずみに一次元膨潤

係数(rebound modulus）を掛けて求められ，次のようになる．

$$\Delta u = \overline{E}_r \Delta \varepsilon_{vd} = \frac{\sigma_v'^{1-m}}{mK_2 \sigma_{vo}'^{n-m}} \tag{2.13}$$

ここで，$\Delta\varepsilon_{vd}$はせん断ひずみ振幅γで1サイクルの載荷を受けたときに生じる体積ひずみ，ε_{vd}はこれまでに蓄積された体積ひずみである．このモデルはMartin-Finn-Seedモデル[17]と呼ばれる．パラメータは，C_1～C_4，m，n，K_2の7つである．

なお，最近は，式(2.12)に代わり，次の2パラメータモデル[18]が使われている．

$$\Delta\varepsilon_{vd} = C_1 \gamma \cdot e^{-C_2 \varepsilon_{vd}/\gamma} \tag{2.14}$$

また，このモデルは1サイクルごとの体積ひずみを発生するモデルであるので，実際のプログラムでは，半サイクルごとの式に直し，さらに載荷時は体積ひずみの発生が無く，除荷時にひずみに比例して体積変化が生じる様にルールを追加している．

②YUSAYUSA

非排水条件下で$\tau - \sigma_v'$平面上の応力経路を指定する方法である．図-2.7に経路の模式図を示す．経路は次のように指定されている．

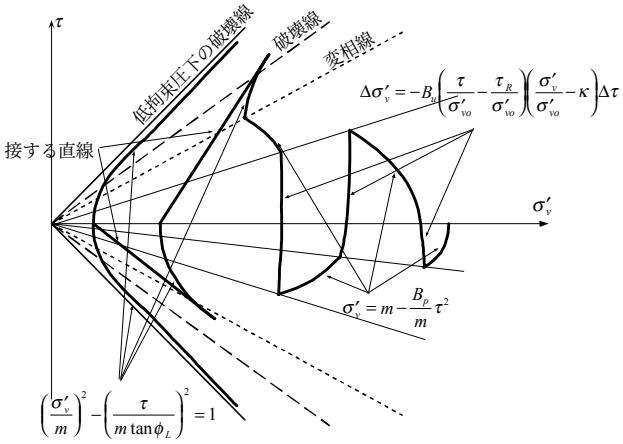


図-2.7　応力経路図

i) 水平面上のせん断応力τと，鉛直有効応力σ_v'との比τ/σ_v'が一定となる降伏条件を仮定する．降伏曲面は，正負のτに関し独立とする．

ii) 降伏時のσ_v'-τ平面上の応力径路を，次のような放物線で表す．

$$\sigma_v' = m - \frac{B_p}{m}\tau^2 \tag{2.15}$$

ここで，B_p：水圧の上がり易さを表すパラメータ

m：τ-σ_v'平面上の位置を決めるパラメータ

iii) 除荷時でも，水圧はわずかに上昇する．このときの応力径路は，次式となる．

$\sigma_v' \geq \kappa\sigma_{vo}'$のとき

$$\Delta\sigma_v' = -B_u\left(\frac{\tau}{\sigma_{vo}'} - \frac{\tau_R}{\sigma_{vo}'}\right)\left(\frac{\sigma_v'}{\sigma_{vo}'} - \kappa\right)\Delta\tau \tag{2.16}$$

$\sigma_v' < \kappa\sigma_{vo}'$のとき

$$\frac{d\sigma_v'}{d\tau} = 0 \tag{2.17}$$

ここで，B_u：水圧の上がり易さを表すパラメータ

σ_{vo}'：初期有効応力

κ：水圧の発生量をコントロールするパラメータ

iv) 変相角（θ_s）が存在し，一旦τ/σ_v'が$\tan\theta_s$を越えると次のような応力径路をたどる．

τが増加するとき，応力経路は双曲線で表され，過剰間隙水圧u_gは減少する．

$$\left(\frac{\sigma_v'}{m}\right)^2 - \left(\frac{\tau}{m\tan\theta_L}\right) = 1 \tag{2.18}$$

ここで，θ_Lは有効応力が小さいときの内部摩擦角で，次のように与えられている．

$$\tan\theta_L = 1.4\tan\theta_s \tag{2.19}$$

一方，τが減少するとき，それまでたどってきた，双曲線の接線上を動く．このとき過剰間隙水圧は上昇する．

v) σ_v'が初期応力に比べて充分小さくなった場合に完全液状化と見なし，以後τが増えるときも，減るときも，応力経路は双曲線上を動く．

③その他のモデルおよび注意事項

Martin-Finn-Seed モデルのような実験式は多く提案されている．この場合，実験はひずみ振幅一定，応力振幅一定などの違いがあり，また，結果が体積ひずみになっているものと過剰間隙水圧発生モデルになっているものがある．しかし，実務で使われるようなプログラムにはほとんど取り入れられていない．

Endochronic 理論と呼ばれる蓄積される内部変数を用いた定式化もある（例えば文献19，20）．しかし，現在ではほとんど用いられていない．Endochronic 理論は，内部変数を導入することで客観化を計っているようであるが，物理的に意味のある内部変数でないと，形式的には上で述べた実験式と変わるところはない．また，液状化のような複雑な現象を簡単な内部変数で表現することは，現在のところ困難である．

上述のように，一次元のモデルには，体積変化を求める方法と応力経路を指定する方法とがある．後者は非排水条件という条件の下での定義であるので，排水が生じる場合には適用できないのが最大の欠点である．YUSAYUSA では経路を現在の位置の関数として式で表しているので，排水により位置が変わったとしてもそれ

以後の経路を計算できるが，これは単に辻褄合わせである．後に述べる FLIP ではこの様な辻褄合わせも困難で，排水条件は考慮できない．非排水条件のみを考慮すると，次節で述べるように，特に Biot の式を用いなくても有効応力解析が可能でプログラムが楽になると言う長所はあるが，現象の再現としてみれば非常な欠陥である．これに比べれば，体積ひずみモデルは，排水，非排水条件に関わらず使うことが出来る．

(4) 一次元モデルの拡張としての多次元モデル

一次元解析で用いられるモデルは直観的でわかりやすい．特に，一次元状態で確立されたプログラムや手法があるとき，これを多次元に拡張したいときなど，多次元解析でもこれを使おうというのは自然な流れである．この場合も，一次元解析同様，せん断挙動とダイレタンシーは別に考慮される．なお，以下では，暗黙の了解として x 軸が水平方向，y 軸が鉛直方向を仮定する．すると，前項で述べた一次元のモデルで使ったτやγはτ_{xy}とγ_{xy}の関係を表している式となる．

①多次元化の困難さ

モデル化の最も単純なものは，一次元のτ_{xy}-γ_{xy}関係をそのまま適用し，接線剛性 G を求めようと言うものである[21)22)]．多次元効果を考えない荒い方法のようにも見えるが，地震応答解析では，ほとんどの場合，水平面内のせん断が卓越していることを考えれば，それほど悪い近似ではない．

これ以外の場合には，一次元解析で用いられたせん断挙動を多次元条件下で表す事になるが，これは単純ではない．これは次のような理由による．

多次元状態で，一次元のせん断応力とせん断ひずみに相当するものは，相当応力σ_eと相当ひずみ e であろう．これらは，偏差応力，偏差ひずみの二次普遍量の平方根として，次のように定義される．

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}\ , \qquad e = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}} \tag{2.20}$$

$s_{ij} = \sigma'_{ij} - \delta_{ij}\sigma'_m$ ：偏差応力

$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_v / 3$ ：偏差ひずみ

$\varepsilon_v = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ ：体積ひずみ

ここで，3/2が付いているのは，三軸応力状態で相当応力が軸差応力と等しくなるための処置である．なお，応力とひずみは土質力学の慣例に従い圧縮を正にしている．

多次元化が困難な点というのは，式(2.20)が常に正の値しか取らないことである．例えば図-2.8(c)の様に等方応力状態で両振りのせん断応力を加える載荷を行ったとする．ダイレタンシーを考えないことにすると，期待される応力－ひずみ関係と応力経路は図-2.8(a)(b)となる．しかし，これを相当応力に書き換えると，図の点線のようになる．ところで，図-2.8(c)に示した片振りの載荷を考えると，応力経路は両振りの経路と同じになる．つまり，応力経路を見ると，片振りと両振りの載荷を区別することが出来ない．

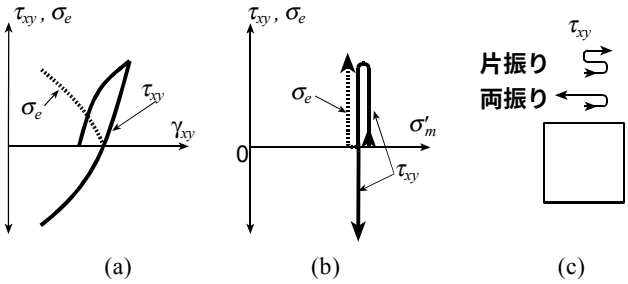


図-2.8　一次元と多次元のモデル化

このことは，一次元の式を単純に多次元に持ち込めないことを示している．つまり，多次元化するには何らかの発想の転換が必要である．

②東畑らの方法

東畑ら[23)]は，図-2.9に示すように多くのばねを円周上に配置することによってこの問題を解決した．すなわち，一次元モデルの多次元化の困難なところは，一次元条件では応力やひずみは正負の符号しか取らないベクトルであるのに対し，多次元条件ではせん断成分は大きさと方向を持っているので，単に正負だけで表せない事であった．多くのばねを使うことにより，個々のばねは正負の符号で挙動が表現できるようになる．

このモデルは，その後，井合[24)]によって FLIP[25)]というプログラムに導入された．

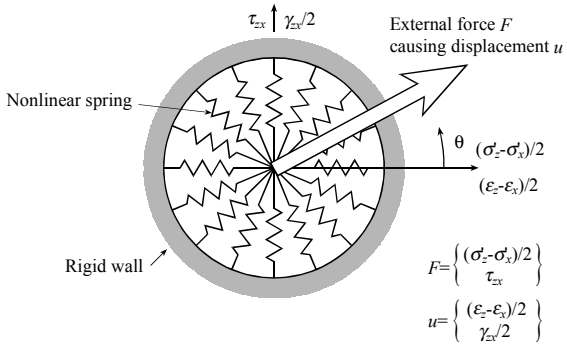


図-2.9　マルチスプリングモデル

③福武らの方法

福武らは，Ramberg-Osgood モデルを用いた多次元解析を行っている[26)]．ここでは，x，y，z のそれぞれの方向に関し，せん断応力－せん断ひずみ関係を式(2.11a)の様に

設定し，その接線剛性 G_x，G_y，G_zをそれぞれの方向のせん断剛性としている．

しかし，この方法は理論的におかしい所がある．多次元空間上でのせん断成分は，式(2.20)に示される相当応力や相当ひずみである．しかし，彼らの定式化ではこの内，せん断応力に相当する項のみを考慮しており，軸差応力による成分を考慮していない．このことは，座標軸の取り方を変えれば結果が異なることになり，客観性の原理を満たしていない．また，各方向でせん断剛性が独立と言うことは，ある方向のせん断が卓越したため多方向のせん断剛性が小さくなると言うことも説明できず，単に各方向を独立させただけである．

実は，客観性の原理を満たさないこと自体は，実務では余り問題にする必要がない．あらゆる条件で成立するなどを言わず，限られた条件下で使うようにすれば良いだけの話である．例えば，最初に示したτ_{xy}-γ_{xy}関係よりせん断定数を求めようとする考え[21)22)]も客観性の原理を満たしていないが，地震による地盤の変形が水平面内のせん断に支配されると言う近似化の本では十分成立する．誰も，鉛直面からずれて y 軸を取ることはしないであろう．しかし，水平面内の二つの方向 x，z に付いては話は別である．ある場合には NS，EW 方向に取られたり，一つの方向を振動の主方向と合わせたり，建物の長軸方向と合わせたりと，色々な可能性が考えられる．この様な場合に座標軸の取り方により答えが変わるのは，実務でも大いに問題となることである．

④吉田らの方法[27)]

この方法は，単なる構成則と言うより，応力－ひずみ関係を作る方法を示している．内容は二つの部分に分けて考えるとわかりやすい．

一次元モデルの項で述べたように，Masing 則を使って履歴曲線を作ると，実験値として表された G-γ，h-γ関係を完全に満たすことは不可能である．そこで，図-2.10に示したように，除荷が起こると除荷点を通る仮想の骨格曲線を考え，これに Masing 則を適用した[28)]．仮想の骨格曲線は除荷点を通る，Masing 則を適用して得られる履歴曲線による等価減衰定数が実験値と等しくなるの二つの条件を満たす必要があるので，二つ以上のパラメータを持つモデルであれば何でも良い．非線形のモデルは最低でも二つのパラメータを持っている．ただし，与えられた減衰に対してパラメータが決まらなければならない．例えば双曲線モデルは理論上可能な全ての減衰を取ることが出来るので使い易いが，Ramberg-Osgood モデルは b の値によって最大減衰が決まるので，使いにくいと言うことはある．FLIP は，各スプリングについてこの手法を用いている．

その後，骨格曲線に数式モデルを使わず，与えられた G-γ関係を通る部分線形関数とする事により実験値として表された G-γ，h-γ関係を完全に満たすことが出来ることを示した[29)]．この考えは一次元モデルについて行われたが，その後以下に示す多次元解析に拡張された．

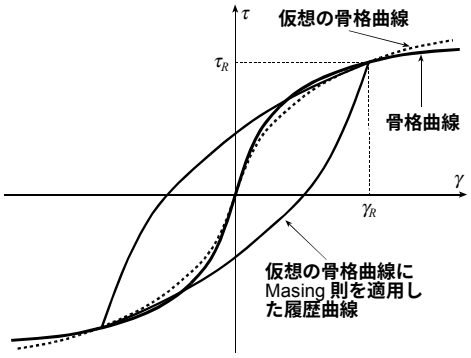


図-2.10　仮想の骨格曲線の考え方

多次元応力空間上でのモデル化[30)]であるが，構成則として要求されるのは，与えられたひずみ（増分）に対し応力（増分）を求める作業であることを強調し，次のように体積変化とせん断成分を分離してモデル化した．

まず，有効拘束圧増分は次式で求められる．

$$d\sigma'_m = B\left(d\varepsilon_v - d\varepsilon_{vd}\right) \tag{2.21}$$

ここで，B は体積弾性係数で有効拘束圧の関数，$d\varepsilon_v$ は体積ひずみ増分，$d\varepsilon_{vd}$ はダイレタンシーによって生じる体積ひずみ（求め方は自由）である．これで有効拘束圧が求まった．

次に，せん断変形に対して，相当応力と相当ひずみの無次元量を，拘束圧依存性を考慮して次のように定義した．

$$\eta = \frac{\sigma_e}{\tau_{\max}}, \qquad \xi = \frac{e \cdot G_{\max}}{\tau_{\max}} \tag{2.22}$$

ここで，G_{max}，τ_{max} はそれぞれせん断弾性定数とせん断強度で，有効拘束圧の関数である．無次元化量に対して応力－ひずみ関係を次式の様に表現する．

$$\eta = \eta(\xi) \tag{2.23}$$

式(2.23)には拘束圧が陽な形が入っていないので，ξの関数である$\eta(\xi)$には自由な数学モデルを使うことが出来る．例えば，双曲線モデルと Ramberg-Osgood モデルは次のように表現できる．

$$\eta = \frac{\xi}{1+\xi}, \qquad \xi = \eta\,(1+\alpha\,\eta^{\beta-1}) \tag{2.24}$$

偏差ひずみ増分 de_{ij} に対応する無次元量 $d\xi_{ij}$ は，式(2.22)の第2式と同様に次のようにおける．

$$d\xi_{ij} = de_{ij} G_{\max} / \tau_{\max} \tag{2.25}$$

式(2.25)と式(2.23)を微分して得られる接線剛性 $g=d\eta/d\xi$

を用いれば，増分後の偏差応力 s_{ij} は次式により求めることが出来る．

$$s_{ij} = (\eta_{ij,o} + g d\xi_{ij})\tau_{\max} \tag{2.26}$$

ここで，$\eta_{ij,o}$ は増分前のηの値である．

履歴挙動に関しては，図-2.11の様に無次元化π平面上で除荷点を通る，等方+移動硬化則に基づく後続負荷曲面（降伏曲線）を考え，その半径をηとすれば（Masing 則，前記の改良も考慮）これまでと同じ式が使える事になる．その後，初期異方応力状態の問題に関連し，半径を h とするのではなく，除荷点と現在の状態点の距離の半分を取ることが良いことが示されている[31]．これについては，後述する．

以上に見るように，この方法は，多次元空間におけるモデル化の一般的な方法を示しているものである．なお，この方法は拘束圧依存を自動的に考えているので，この後の⑥項で述べるような現象は起こらない．

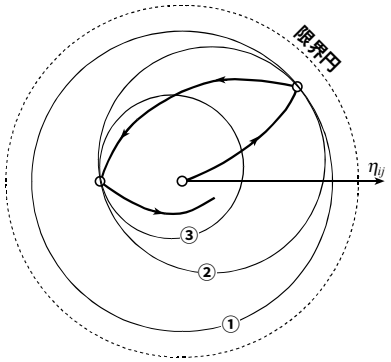


図-2.11　履歴曲線の考え方

⑤ダイレタンシーのモデル化

ダイレタンシーモデルは，せん断変形モデルとは独立に与えることが出来る．従って，一次元モデルの考え方もそのまま適用できる．ここでは，これ以外の考えを示す．

福武らは，Bowl モデルという考えを用いている．図-2.12は繰返し載荷を受ける乾燥砂のダイレタンシー関係を示している．この関係を，単調に増加する成分と定常な部分に分け，次のようにモデル化した[22]．

$$\varepsilon_{vd} = \varepsilon_{\Gamma} + \varepsilon_{G} \tag{2.27}$$

$$\varepsilon_{\Gamma} = A \cdot \Gamma^{B}$$

$$\varepsilon_{G} = \frac{G^{*}}{C + D \cdot G^{*}}$$

$\Gamma = \sqrt{\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2}$ Γ：合せん断ひずみ

$G^{*} = \sum \sqrt{\Delta\gamma_{xy}^2 + \Delta\gamma_{yz}^2}$ G*：累加せん断ひずみ

ここでも，彼らの応力－ひずみ関係モデル[26]同様，軸差応力を考えていない事から来る客観性が成立しないと言う問題が発生する．先にも述べたように，客観性の原理が成立しないことはそれほど大きな問題ではないが，水平面内の座標の取り方により答えが変わる不都合さが生じるのは適切とは言えない．なお，文献26では軸差応力の影響が構造物近傍では発生する可能性があることから，必要に応じて軸差応力を入れる事を述べているが，ここで示した事はこれとは異なる．

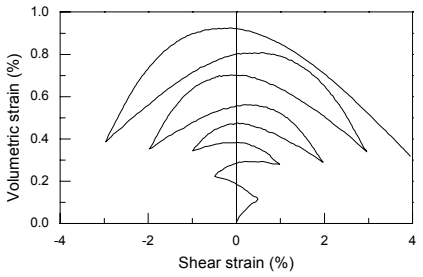
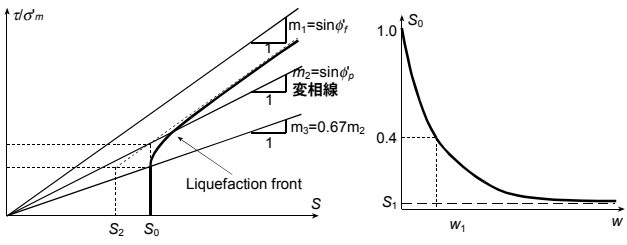


図-2.12　乾燥砂のダイレタンシーによる体積ひずみ[32]

井合は，東畑の提案した過剰間隙水圧の発生量が塑性仕事の関数として表されると言う実験[33]を用い，非排水状態の有効応力経路を決める方法を提案している[34]．すなわち，非排水状態での応力経路を図-2.13(a)に示すような Liquefaction front に設定し，その最先端の位置を正規化塑性せん断仕事wの関数として次のように表している．

$$\begin{aligned} S_0 &= 1 - 0.6\,(w/w_1)^{p_1} && (w \le w_1) \\ S_0 &= (0.4 - S_1)\,(w/w_1)^{p_2} && (w > w_1) \end{aligned} \tag{2.28}$$



(a)　　(b)

図-2.13　過剰間隙水圧発生モデルのイメージ

辻野ら[30]は，式(2.5)から直接体積ひずみを求めている．

⑥拘束圧依存性に関する問題

この節の最初で，一次元モデルを多次元に適用する場合に生じる困難，すなわち相当応力とひずみが常に正であることを示し，それが各モデルでどのように解決されているかを示した．構成則を表す論文には明瞭に描かれないが，実はもう一つ問題がある．

せん断応力はせん断ひずみと有効拘束圧の関数である．従って，一般的に次のように書くことが出来る．

$$\tau = f(\gamma, \sigma_m') \tag{2.29}$$

ここで，τとγは構成則によって異なり，例えばσ_eと e であったり，τ_{xy}とγ_{xy}であったりする．式(2.29)の全微分を取れば，せん断応力増分が次のように表される．

$$d\tau = \frac{\partial f}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial f}{\partial \sigma'_m} d\sigma'_m \tag{2.30}$$

この関係を模式的に表したのが図-2.14である．ある拘束圧で応力－ひずみ関係が曲線ℓで表され，現在の状態を A とする．この状態で，拘束圧が変わらずひずみが変化すれば B 点に至る．一方，拘束圧が変われば応力－ひずみ関係も変化する（例えば曲線 m）ので，ひずみが変わらないとすれば状態点は C に至る．この二つのせん断応力の変化量が式(2.30)の第1項，第2項に対応している．従って，ひずみと有効拘束圧の両方が変化したときには，状態点は D 点に至ることになる．

本来，有効拘束圧の増分もひずみの関数であるから，式(2.30)はひずみ増分のみの関数に書くことが出来るはずであるが，式が複雑であり，陽に求めることは困難である．

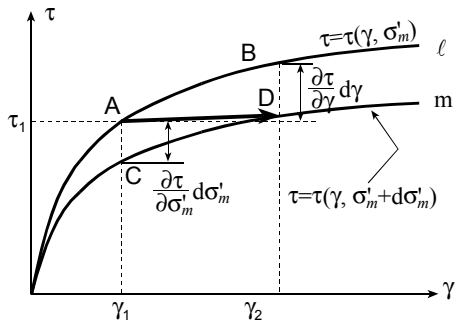


図-2.14　拘束圧依存性を考えるためのモデル化

図-2.14から分かるように，真の接線剛性は A→D である．しかし，式(2.30)に基づき真の接線剛性を求めることが出来ないので，数値計算の際には，第1項を接線剛性として使う事が多い．

例えば数値積分の際に Newmark のβ法で代表される接線剛性法を用いたとすれば，第2項は不釣り合い力として次のステップに持ち越すか，イタレーションを行い無くす必要がある．ここで問題となるのが，第2項の計算である．一次元の問題ではひずみの関数として応力が陽に表現されているので，この項を求めることには何の問題も無かった．しかし，多次元化された定式化ではこの項は単純には計算できない．

吉田らの方法では，式(2.26)により第2項も考慮している．しかし，この項を求めず，真の応力増分として，式(2.30)項の第1項のみを用い，不釣り合い力を考慮していない構成則もある[26)35)]．

多くの力学の問題では，拘束圧依存性が無いので，式(2.30)の第2項は存在しない．この場合には，式(2.30)で求めた応力増分（ひずみ増分が有限であるので近似値）と式(2.29)で求めた応力増分の差は小さいし，増分を小さくすることで誤差はどこまでも小さくすることが出来る．しかし，拘束圧依存性がある場合には，その差は大きく，また，ひずみ増分を小さくしても誤差を無くすことは出来ない．その意味で，第2項を考慮していない構成則では真の有効応力解析とは言えないと考えられる．

(5) 弾塑性構成則

弾塑性の構成則は，次の三つの原則から構成される．

①降伏条件

$$f\left(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p}\right) = 0 \tag{2.31}$$

ここで，ε_{ij}^{p} が入っているのは，硬化材料であることを表している．土では非線形性が強いので，いわゆる弾完全塑性型のモデル化は実用的ではない．式(2.31)が満たされ，かつ，df=0であれば，降伏が維持される．一方，式(2.31)が満たされていないか，df<0であれば除荷が起こっている．すなわち，降伏が継続する条件は次式である．

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^{p}} d\varepsilon_{ij}^{p} = 0 \tag{2.32}$$

②塑性ポテンシャル

塑性ひずみ増分の方向は，関数

$$g\left(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p}\right) = 0 \tag{2.33}$$

の法線方向であるというのが，塑性流れ則である．g=fとすれば関連流動則であるが，土ではダイレタンシーの表現のために，gとfとが等しくない，非関連流動則が一般的で，次のように書ける．

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \tag{2.34}$$

ここで，λは比例定数で，式(2.32)と(2.34)より次のように求められる．

$$\lambda = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{\dfrac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^{p}} \dfrac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}} \tag{2.35}$$

式(2.35)を式(2.34)に代入すると，次式を得る．

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{st}} d\sigma_{st}}{\dfrac{\partial f}{\partial \varepsilon_{st}^{p}} \dfrac{\partial g}{\partial \sigma_{st}}} \tag{2.36}$$

③弾塑性ひずみ成分

全ひずみは，弾性成分と塑性ひずみ成分の和として与えられる．

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p} \tag{2.37}$$

このうち弾性成分は弾性の構成則により求めることが出来る．

$$d\sigma_{ij} = D^e_{ijkl} d\varepsilon^e_{kl} \tag{2.38}$$

したがって，応力増分 $d\sigma_{ij}$ が与えられるのであれば，式(2.38)より弾性ひずみ増分，式(2.36)より塑性ひずみ増分が求められ，これらを式(2.37)に代入することにより全ひずみ増分が求められるので，解が得られることになる．しかし，有限要素法の問題では，ひずみ増分を与え応力増分を求めるような形式になっている必要がある．これまでの式を変形すると，次の式を得ることが出来る．

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \tag{2.39}$$

D_{ijkl} は接線剛性係数で次式で表される．

$$D_{ijkl} = D^e_{ijkl} - \frac{D^e_{ijst}\dfrac{\partial g}{\partial \sigma_{st}}\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} D^e_{pqkl}}{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} D^e_{klst}\dfrac{\partial g}{\partial \sigma_{st}} - \dfrac{\partial f}{\partial \varepsilon^p_{pq}}\dfrac{\partial g}{\partial \sigma_{pq}}} \tag{2.40}$$

ここで，分母の第2項，すなわち，式(2.35)の分母

$$h = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon^p_{ij}}\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \tag{2.41}$$

は硬化パラメータと呼ばれる．

弾塑性の構成則は，降伏条件，塑性ポテンシャル，硬化パラメータの関数形により構成されている．ひずみ硬化には，等方硬化と移動硬化の両方が使われる．また，繰返し載荷に関しては応力変化により拡大する新たな負荷面（降伏曲面）を考えるモデルが多い．繰返し則の詳細は個々の論文を参照していただく事にして，ここでは述べない．

①西モデル

西らの単調載荷に対するモデル[36]を金谷らが拡張したもの[37]である．

降伏条件　$f = \eta(\sigma_{ij}) - \eta_c(\varepsilon^p_{ij})$ (2.42)

ここで，ηは応力比である．また，第2項は次式である．

$$\sqrt{de^p_{ij} de^p_{ij}} = \frac{d\eta_c}{G^*_o (1-\eta/M_f)^2} \tag{2.43}$$

塑性ポテンシャル

$$g = \frac{1}{1-a}\ln\{a(M_m - \eta) + \eta\} + \ln\sigma_m \tag{2.44}$$

硬化パラメータ

$$h = \frac{G^*_o (1-\eta/M_f)^2}{M_m \sigma_m} \tag{2.45}$$

なお，彼らの定式化では，式の計算の途中，一部省略されている部分がある．このモデルは太田・関口モデルの考えを用い除荷の判定としているのが特徴である．また，この結果として主応力回転に伴うダイレタンシーを自動的に考慮していることになる．

②LIQCA のモデル[38]

降伏条件　$f = \bar{\eta}_{(n)} - k_s$ (2.46)

ここで，$\bar{\eta}$ は応力比である．

塑性ポテンシャル　$f_b = \bar{\eta}_{(n)} - \tilde{M}\ln\left(\dfrac{\sigma'_m}{\sigma'_{ma}}\right)$ (2.47)

ここで，$\tilde{M}$ は変相時の応力比である．

硬化パラメータ　$k_s = \dfrac{\bar{\eta}_{(f)} G \bar{\gamma}^p}{\bar{\eta}_{(f)} + G\bar{\gamma}^p}$ (2.48)

③飛田・吉田モデル[39]

降伏条件　$f = \sigma_e - \alpha_M p = 0$ (2.49)

$$\alpha_M = \frac{\sigma_e}{p}$$

塑性ポテンシャルはせん断に関する関連流動則と一般化応力－ダイレタンシー則

$$d\varepsilon_{vd} = \mu de^p - \frac{s_{ij}}{\sigma'_m} de_{ij} \tag{2.50}$$

を用いて作られている．また，

$$\alpha_M = \frac{\xi}{A + B\xi} \tag{2.51}$$

とすることにより等方硬化を考えている．

(6) Multi-mechanism タイプの構成則

砂は，粒子間の滑りを伴ってせん断変形する．これを図-2.15の様に主応力状態を表したときの三つの滑り面で代表させてその挙動を求めるものである．代表的なものに，松岡モデルがあ[40][41]り，二次元問題に使われている．

ここでは，文献40に基づいて説明する．図-2.16にモールの円を示す．松岡モデルでは，この応力状態を定義するのに，モビライズド角ϕ_m，平均拘束圧σ'_m，主応力と座標軸のなす角αを用い，それぞれに対して独立に（スカラー的に）変形を定義している．この結果，次の式が導ける．

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [D]^{-1} \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D_2]^{-1}[D_1]^{-1} \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.52}$$

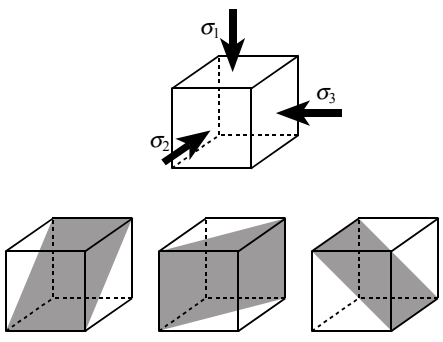


図-2.15　Multi-mechanism モデルのイメージ図（塗りつぶし分が滑り面）

$$[D_1]^{-1}=\begin{bmatrix} 4\dfrac{\sigma_x\sigma_y-\sigma_y^2-2\tau_{xy}^2}{\sin 2\phi_m(\sigma_x+\sigma_y)^2} & -4\dfrac{\sigma_x^2-\sigma_x\sigma_y+2\tau_{xy}^2}{\sin 2\phi_m(\sigma_x+\sigma_y)^2} & \dfrac{8\tau_{xy}}{\sin 2\phi_m(\sigma_x+\sigma_y)^2} \\ \dfrac{-\tau_{xy}\cos^2 2\alpha}{(\sigma_x-\sigma_y)^2} & \dfrac{\tau_{xy}\cos^2 2\alpha}{(\sigma_x-\sigma_y)^2} & \dfrac{\cos^2 2\alpha}{\sigma_x-\sigma_y} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[D_2]^{-1}=\begin{bmatrix} \bar{R}^s(S_d+\cos 2\alpha) & \bar{R}^r(S_d+\cos 2(\alpha+\delta)) & \bar{R}^c(nS_d+\cos 2\alpha)+\dfrac{1}{2}\dfrac{0.434C}{1+e_o}\dfrac{1}{\sigma_m} \\ \bar{R}^s(S_d-\cos 2\alpha) & \bar{R}^r(S_d-\cos 2(\alpha+\delta)) & \bar{R}^c(nS_d-\cos 2\alpha)+\dfrac{1}{2}\dfrac{0.434C}{1+e_o}\dfrac{1}{\sigma_m} \\ 2\bar{R}^s\sin 2\alpha & 2\bar{R}^r\sin 2(\alpha+\delta) & 2\bar{R}^c\sin 2\alpha \end{bmatrix}$$

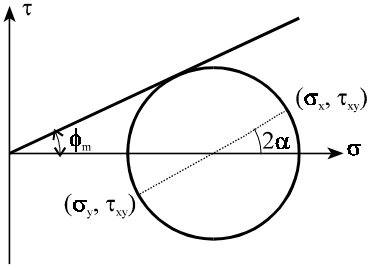


図-2.16　松岡モデルの変形モード

松岡モデルは，単調載荷挙動に対して提案されたモデルである．ここで挙げた二つの構成則は，繰返し載荷に対して異なる定式化をしている．

Multi-mechanism モデルは粒状体としての土の性質を考えたモデルで，物理的な意味が分かりやすい．筆者らも一時 multi-mechanism モデルを扱ったことがある[42]．しかし，繰返し載荷条件に対してその限界を感じて，将来的な開発をあきらめた．その限界とは次のようなものである．

簡単のために平面ひずみ状態を考える．すると，図-2.15 に示した三つのメカニズムの内二つが稼働する．それぞれのメカニズムは過去の載荷の履歴を持っており，その挙動を記述するにはこの履歴量を保持する必要がある．ところで，たまたま等方応力状態になったとする．各メカニズムは主応力状態からのみ決まるので，この状態では二つのメカニズムは区別できない．従って，この状態を経由して応力状態が変わるとき，新たに主応力より計算された各メカニズムが以前のどちらのメカニズムの延長か区別できないわけである．これは，主応力から見ていれば，図-2.8の両振りと片振りの挙動が区別できないのと同じである．先にも述べたように，各メカニズムは履歴量を持っているので，このとき設定を間違えると挙動がおかしくなる．問題は，応力状態のみからこの移行を追いかけるアルゴリズムが出来ないことである．

筆者らが以前プログラムを作ったときには，図-2.8の片振りの様な現象は生じないとしてコーディングした．二次元の地震応答解析ではほとんどの場合，問題がないであろう．しかし，そのような状態が本当に無いと言えるだろうか？　3次元になるとおそらくきちんと仕分けるアルゴリズムを作ることは不可能に近いと考えて，以後の開発を断念したわけである．

なお，文献40では応力反転パラメータという概念を導入することでこの問題の解決を図っているが，その代償として応力－ひずみ関係の勾配が連続しないという現象が生じる．また，41では，速度なども参照しながらメカニズムの移動を決めている．

(7) まとめ

ここでは，有効応力解析を理解し，使う上で最も重要である，構成則について説明した．構成則の問題は非常に難しく，ここで説明したことが全てというわけでは無く，もっと奥が深い．詳細は，各論文を参照していただく他，文献43，44などを参照されたい．筆者もこの分野のプロというわけではなく，どちらかと言えばアマチュアの分類にはいる．その分，なるべくわかりやすく説明したつもりであるが，思わぬ間違いも無いとは言えない．

なお，ここで説明したのは，色々なタイプの構成則を取り入れるよう心がけたが，それでも日本で良く目にする構成則や筆者が勉強したことのある構成則が主である．構成則に対して一般的な説明をしたり，勉強したことのない構成則を記述する勇気はわかなかった．

ユーザーとして構成則に関して覚えておかなければいけない重要なことは，構成則は生き物であると言うことである．つまり，構成則は時々刻々と変化するわけである．ここで示した構成則でも，論文の発表当時から見れば変わっているものもある．後に例題で示すように，液状化解析を前提とすれば，どの構成則も完全には程遠い状況にある．現象と比較して不都合なことがあれば，その部分を直すことが頻繁に行われる．従って，ユーザーとしては，名前のある構成則だからと言うので満足することなく，自分で改良したり，研究者に注文を付けることが重要である．特に，構成則の研究者は自分で複雑な問題や実務的なを解くことが少ないことが多いので，実務者の持っている問題に気が付かないことが多い．

これに関連して，構成則に関する研究者に対する注文がある．それは，構成則に基づいて計算をするサブルーチンを公開して欲しいと言うことである．筆者も色々な構成則を論文に基づいて作ってきたが，論文だけできちんとコーディング出来た記憶はほとんどない．詳細なところを著者に問い合わせたりしてやっとというのがほとんどである．研究者としては，自分の研究は使われてこそ価値があると思うがいかがであろうか？

ただし，このためには，研究者もかなり覚悟を決めてコーディングをする必要がある．一般に構成則の論文では，例えば液状化試験の様に非常に条件が良く，解析し

やすい問題を検証例に挙げている．しかし，地震応答解析では非常に複雑な入力もあるので，上記のような簡単な条件下で動作するプログラムでは役に立たないことが普通である．しかし，この様な過程を通し，研究者自身も自分の構成則の問題を認識できるようになると信じている．

3 土の支配方程式と近似法

土は，土粒子および間隙物質である空気や水で構成され，図-2.1に例を示すように，土粒子が骨格を構成しているので，土の変形では骨格の変形の影響が支配的である．また，間隙物質が水の場合には，その体積変化も考慮されることがある．しかし，土粒子そのものの変形や空気などの気体の剛性は無視されるのが普通である．土骨格と水を考慮した，飽和した土の支配方程式は Biot により最初に提案された[45]ことから，Biot の式と呼ばれることが多い．また，二つの異なる相の材料を扱うことから，二相系の式と呼ばれることもある．Biot の式は，当初は圧密現象に対する提案であったが，その後多くの研究者により改良が加えられている（たとえば文献46を参照されたい）． Biot の式では間隙水で飽和している状態を扱っているが，間隙水がない場合（乾燥状態）には，通常の固体の力学と同じ定式化となる．この中間，すなわち不飽和の問題は，飽和－不飽和理論[47]で扱うことができると考えられるが，動的な問題に対しては用いられていないことから，ここでは扱わない．

Biot の式の支配方程式では，通常の固体の力学から見れば，土骨格，間隙水に対する釣合式と連続の式を考慮するのが特徴である．これ以外に，構成則や変位－ひずみ関係，有効応力の定義式などを用いれば全体の支配方程式を得ることができるが，ここでは特徴的な部分のみを示す．

土の微小要素に対する釣合式は次のように表される．

$$\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} - \rho\mathbf{b} + \rho\ddot{\mathbf{u}} + \rho_f\ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{0} \tag{3.1}$$

ここで，**u** は土骨格の変位，**w** は間隙水の土骨格に対する相対変位，ρは土の質量密度，**b** は重力，ρ_fは水の質量密度，$\boldsymbol{\sigma}$は全応力，**L** は微分オペレーターである．次に，間隙水に関する釣合式（または Darcy の法則）は次のようになる．

$$\nabla p + \rho_f g\mathbf{k}^{-1}\dot{\mathbf{w}} + \rho_f\ddot{\mathbf{u}} + \frac{\rho_f}{n}\ddot{\mathbf{w}} - \rho_f\mathbf{b} = \mathbf{0} \tag{3.2}$$

ここで，g は重力加速度，**k** は透水係数，n は間隙率，∇は微分オペレータである．最後に，連続の式は次のようになる．

$$\mathbf{m}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{w}} + \frac{n}{K_w}\dot{p} \tag{3.3}$$

ここで，**m** は Kronecker のδに相当するベクトル，p は間隙水圧，K_wは間隙水の体積弾性係数である．この定式化は，**u**，**w**，p を未知数としていることから，u-w-p 形式と呼ばれる．これに対し，水の絶対変位 **U** と相対変位 **w** の間には

$$\mathbf{w} = n(\mathbf{U} - \mathbf{u}) \tag{3.4}$$

の関係があるので，**U** を用いて **w** を消去することができる．これを u-U-p 形式と呼ぶ．これらはいずれも厳密な支配方程式であるが，筆者の知る限りではこれを基にして解いた事例はない．

K_wが有限の大きさとすれば，式(3.2)(3.3)から p を消去することができ，支配方程式は u-w，または u-U 形式と呼ばれる形式に変換できる．これらの式も，近似化を行っているわけではないので，厳密な支配方程式である．これに対して，水の相対加速度は土骨格の変位に比べて小さいという近似（$\ddot{w}=0$）が行われる．すると，支配方程式は次のようになる．

$$\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma} - \rho\mathbf{b} + \rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \tag{3.5}$$

$$\nabla^{T}\frac{\mathbf{k}}{\rho_f g}\left(-\nabla p - \rho_f\ddot{\mathbf{u}} + \rho_f\mathbf{b}\right) = \mathbf{m}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{n}{K_w}\dot{p} \tag{3.6}$$

これは，u-p 形式と呼ばれる．地震応答解析で扱う程度の動的な問題であれば，この式は十分な精度を持っている．また，この式から左辺括弧内の第2項（水の慣性力）を消去する近似化も行われるが，これでも誤差はそれほど大きくないと考えられている[48]．

圧密の問題では，慣性力（式(3.5)の左辺第3項と式(3.4)の左辺括弧内の第2項）は小さいとして無視され，水の体積弾性係数が無限大であるという近似も行われる．さらに，定常状態を考えれば時間に関する微分の項は消え，静的な釣合式が求まるし，相互作用を考慮しなければ，浸透の式なども導くことができる．土の問題では Biot の式は，すべての支配方程式の基となっている式である．これらの各式は地盤工学の多くの分野で使われている．これからわかるように，地震応答解析は Biot の式の中で最も多くの項を考慮している．従って，これを解くことも最も難しい．

このような近似化の他に，動的解析では，非排水条件が仮定されることもある．これは，地震の作用時間は短いので，間隙水が排出する時間がほとんどないという考えによる．ただし，筆者らの事例解析[49]では，確かに水の流動量は小さいが，一方では水の体積弾性係数の値は大きいので，間隙水圧の変化量は無視できるオーダーとは限らない．

室内要素試験では厳密にこの条件が満たされる．非排水条件は **u** = **U**（**w** = **0**）と置くことで達成できる．非排水条件下では，u-w-p 形式から出発しても u-p 形式から出発しても全応力とひずみの関係式を

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \left(\mathbf{D} + \mathbf{m} \frac{K_w}{n} \mathbf{m}^{\mathrm{T}} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.7}$$

と置くことで一相系の式が導ける．つまり，非排水条件では，土の微小要素を考えれば土骨格と水の相互作用はあるが，支配方程式では，相互作用を見かけ上考慮しない形で書ける．ただし，この形式の非排水条件では水の体積弾性係数を無限大とすることができないので，$K_w=\infty$ を仮定した解法では使うことはできない．これ以外に，FEM の定式化の際に非排水条件を考慮する方法もある．

これら，支配方程式は，特殊なケースを除けば，有限要素法によって解かれる．詳細な誘導は省略するが，たとえば，u-U 形式の支配方程式を空間に関し FEM で表すと，次のようになる．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{\mathrm{u}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{\mathrm{U}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{U}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\mathrm{uu}} & -\mathbf{C}^{\mathrm{uU}} \\ -\mathbf{C}^{\mathrm{uU}^T} & \mathbf{C}^{\mathrm{UU}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{U}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}+\mathbf{K}^{\mathrm{uu}} & \mathbf{K}^{\mathrm{uU}} \\ \mathbf{K}^{\mathrm{uU}^{\mathrm{T}}} & \mathbf{K}^{\mathrm{UU}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}^{\mathrm{u}} \\ \mathbf{F}^{\mathrm{U}} \end{Bmatrix} \tag{3.8}$$

$$\mathbf{M}^{u} = \int_V \mathbf{N}^{u^{\mathrm{T}}} \left(\rho - n\rho_f \right) \mathbf{N}^{u} dV$$

$$\mathbf{M}^{U} = \int_V \mathbf{N}^{U^{\mathrm{T}}} n\rho_f \mathbf{N}^{U} dV$$

$$\mathbf{C}^{uu} = \int_V \mathbf{N}^{u^{\mathrm{T}}} \rho_f g \mathbf{k}^{-1} n^2 \mathbf{N}^{u} dV$$

$$\mathbf{C}^{uU} = \int_V \mathbf{N}^{u^{\mathrm{T}}} \rho_f g \mathbf{k}^{-1} n^2 \mathbf{N}^{U} dV$$

$$\mathbf{C}^{UU} = \int_V \mathbf{N}^{U^{\mathrm{T}}} \rho_f g k^{-1} n^2 \mathbf{N}^{U} dV$$

$$\mathbf{K}^{uu} = \int_V \left(\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}} \mathbf{N}^{u} \right)^{\mathrm{T}} \frac{(1-n)^2}{n} K_w \left(\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}} \mathbf{N}^{u} \right) dV$$

$$\mathbf{K}^{uU} = \int_V \left(\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}} \mathbf{N}^{u} \right)^{\mathrm{T}} (1-n) K_w \left(\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}} \mathbf{N}^{U} \right) dV$$

$$\mathbf{K}^{UU} = \int_V \left(\boldsymbol{\nabla}^{T} \mathbf{N}^{U} \right)^{\mathrm{T}} n K_w \boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{T}} \mathbf{N}^{U} dV$$

この内，質量マトリックス **M** については4.1節も参照されたい．

前述のように，基礎式としては，u-U，u-w 形式は厳密であるが，FEM にしたとき，未知数の数が多い．そこで，計算時間節約のことなどを考えて，u-p 形式が用いられることも多い．u-p 形式は圧密解析で多く使われてきた手法である．u-p 形式の定式化は二つの流儀が知られている．一つは Sandhu 流といわれる解法[50]で，p を節点に関する未知数と考える方法である．この方法では，p に u より低次の補間関数を使うことが勧められているが実際には同じ補間関数を使うことも多々行われている．FEM による表現は次のようになる．

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ \mathbf{M}_{\mathrm{f}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\ddot{\bar{\mathbf{u}}} \\ d\ddot{\bar{\mathbf{p}}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{\mathbf{up}}{}^{T} & \mathbf{K}_{\mathrm{p}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\dot{\bar{\mathbf{u}}} \\ d\dot{\bar{\mathbf{p}}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{K}_{\mathbf{up}} \\ 0 & \mathbf{K}_{\mathbf{pp}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\bar{\mathbf{u}} \\ d\bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d\mathbf{F} \\ d\mathbf{F}_{\mathrm{p}} \end{Bmatrix} \tag{3.9}$$

この方法の欠点は二つあり，一つは係数マトリックスが対称にならないこと[2]，もう一つは非排水条件が満たせないことである．非排水条件では，隣接する要素で水圧が異なるので，後者の欠点は当然の結果といえよう．圧密の問題ではこの欠点を巧みに避けることができる．圧密の問題では，瞬時の荷重が与えられたとき，それは一瞬過剰間隙水圧に受け持たれ，その消散過程を追跡するわけで，非排水条件を考慮しなければならないのは一瞬だけである．そこで，この一瞬の解析を行わず，有限の時間増分に対して支配方程式を解けば，初期条件が完全には求まっていないという欠点はあるが，実用的には問題なく解くことができる．これに対して，地震応答解析では有限の時間非排水条件を考慮する必要があり，したがって，Sandhu 流は使うことができない．

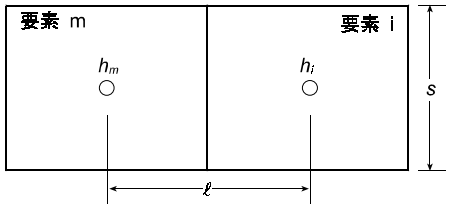


図-3.1 Christian 流の定式化に用いられる水の流れを考えるためのモデル

u-p 形式のもう一つの解法は Christian 流[51]と呼ばれ，間隙水圧は要素重心の値で代表させる．圧密解析では差分法を用いる[52]．この解法では，水の流れは要素単位で扱われる．図-3.1に示すモデルの二つの要素の辺を介する水の流れは，次式で計算できる．

$$Q = \mathrm{d}t s k \frac{h_m - h_i}{\ell} \tag{3.10}$$

ここで，h は水頭で，その他の量については図を参照されたい．要素形状が複雑な場合には若干工夫がいるが，同じように計算できる．すべての辺について流量を計算し，一方，体積変化も要素全体について積分して考慮するとすれば，連続の式は次のようになる．

$$\alpha \left(\tilde{p}_t^m - \rho_f \mathbf{x}_{\mathbf{m}}{}^{\mathrm{T}} \mathbf{b} \right) \mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\tilde{p}_t^i - \rho_f \mathbf{x}_{\mathbf{i}}{}^{\mathrm{T}} \mathbf{b} \right) \mathrm{d}t = -\mathbf{K}_{\mathbf{p}}{}^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\bar{\mathbf{u}} - \frac{nV}{K_w} \left(\tilde{p}_t^m - \tilde{p}_{t-dt}^m \right) \tag{3.11}$$

なお，式(3.9)では間隙水の慣性力を無視しているほか，水圧に関しては後方差分を使っている．また，文献52では水の体積変化も無視している．全てを考慮した式は，文献53に示した．水の慣性力項を無視する影響は文献54で論じられている．これに，釣合式を加えれば，支配方程式が得られる．

---

[2] 液状化解析で，弾塑性の構成則を用いると，剛性行列は非対称となるので，これは大きな欠点とは言えない．

Christian 流の解法では，非排水条件についても，要素全体として非排水条件が成立しているように条件をゆるめることにより，元の支配方程式から連成項を削除するだけで扱うことができる．また，係数行列が対称になること，水の体積弾性係数が無限大であっても使えること，未知数の数も少ないことなど，解法上の利点は多い．しかし，一方では，通常の FEM からはずれたコーディングが必要なこと，実用的に使えるのは三角形要素や四辺形要素に限られることなどの制約もある．また，場合によっては，水の慣性力項を無視した影響が現れることもある．

ここでは，線形の系について式を展開した．非線形の系を解く場合には，増分形に直す必要がある．この変換は，時間の関数はすべて増分を表す d をつけることで行うことができる．ただし，これまでの式で **b** で表されている物体力はたとえば重力の加速度のように，動的解析の間変化しないことが普通で，この場合にはその増分は0であるので，これらの項は考える必要がない．つまり，支配方程式から重力の項（実際には，過去の履歴により載荷されたすべての荷重）が消えてしまうわけである．このことは重力を考えていないのではなく，その項は初期応力として考慮されているということを考えれば理解できよう．側方流動の問題のように，重力の作用下でのせん断強度が低下する問題を考えるときには，この影響が増分式で考慮されていないという意見を聞くこともあるが，これは間違いで，基礎方程式をきちんと解けば，自動的に考慮されている．

これまでは，間隙水で飽和した二相系の支配方程式を扱った．これに対して，実用的には一相系の支配方程式，すなわち，水との連成を考えない支配方程式がある．土が乾燥状態にあれば，Biot の支配方程式から水の項をとることが出来，一相系の式となることは当然である．これに対して，非排水状態が成立していれば，全応力に対して基礎式を作ることが出来，外的には一相系の式が得られる．これらは厳密な意味での一相系の式である．さらに，このようなうるさいことは考えず，水と土は一緒に動くが，体積変化は自由に起こり得る，すなわち，式(3.1)で水の貢献分を無視するというもっと単純な考えから一相系の式を使うことも出来る．一相系の支配方程式では，通常の固体の力学と同じ扱いが出来る．

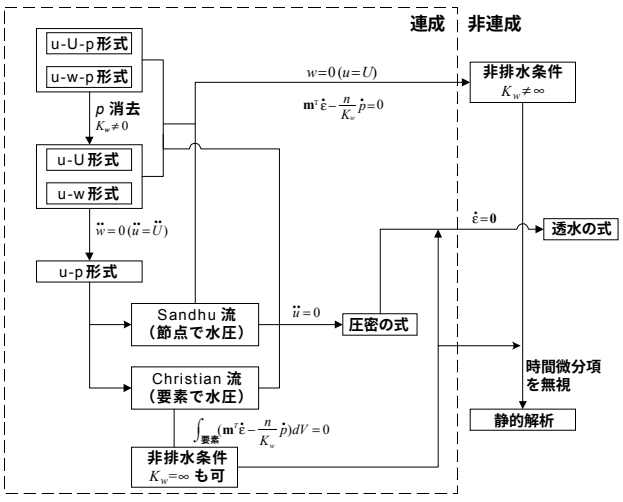


図-3.2　Biot の式の系統図

これまでに示した手法をまとめて示すと，図-3.2となる．

4 運動方程式とその解法

前項では，土と水の混合体を扱う Biot の式を紹介した際，厳密な方法以外に，いくつかの近似法を示したが，これは，加速度や速度などに関する扱いに関するものであった．ところで，土を鋼やコンクリートといった通常の構造用材料と比べると最も異なる点の一つは有効応力の原理がある，すなわち，剛性や強度といった力学特性が有効応力（通常は，有効拘束圧）に依存している．地震中には有効応力も当然変化するので，剛性や強度は時々刻々変化する．この変化を忠実に追いかけるか，近似化を行うかというのが解析の選択肢であり，これが運動方程式の解法と関係してくることが，地盤の動的解析の理解を複雑にしている要因の一つである．そこで，ここではまず，運動方程式の解法について説明し，その後応力の扱いとの関係を示す．なお，ページの都合上，後で説明される事項を先に使ったりすることがあるが，ご容赦願いたい．

4.1　運動方程式の数値積分法

運動方程式は，時間と空間に関する偏微分方程式である．これを解く際には，空間と時間のそれぞれについて解を求める必要がある．このうち空間に関しては，有限要素法が用いられることが多い．その他，境界要素法なども解法としては存在するが，土の地震時の応答で考慮しなければならない材料の非線形性を考慮することが非常に困難であるため，特殊な場合を除き用いられない．また，一次元の問題に限れば，解析解を用いることもある．この項では，有限要素法を前提として説明し，次項で解析解を用いている SHAKE[55]について少しふれる．

有限要素法を用いると，運動方程式は次のように表すことができる．

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}+\mathbf{K}\mathbf{u}=-\sum \mathbf{M}\mathbf{I}_i\ddot{u}_{gi} \tag{4.1}$$

ここで，**M** は質量マトリックス，**C** は減衰マトリックス，**K** は剛性マトリックス，$\mathbf{I}_i$ はベクトルで地震動 u_{gi} の作用方向の自由度成分が1，その他が0である．なお，質量マトリックスには，集中質量マトリックスと分布質量マトリックスがある．分布質量マトリックスは加速度に関す

る補間関数を変位に関する補間関数と同じにすることによって，集中質量マトリックスは加速度に関する補間関数を加速度分布を要素内のある領域で一定と考える補間関数を用いることで誘導できる．理論的には分布質量マトリックスの方が精度が良さそうであるが，実際にはそうでないこともある[56]．また，集中質量の方が扱いやすいことから，集中質量を用いるケースが多い．両者の平均を使う方法[57]や，分布質量の対角項で重みをつけた集中質量[58]などの工夫も行われている．

FEM の定式化の部分を省略したので，前項の支配方程式との関係がわかりにくいが，形式的にはどの定式化でも式(4.1)の形に置くことができる．この場合，**u** は変位（基盤に対する相対変位）と水圧に関する自由度を持っているし，**K** は剛性マトリックス以外に土骨格と水の連成項なども含まれるなど，実際の物理的な意味と呼び名が異なるし，水圧が未知数の場合には解法も異なることがある．しかし，以下の理解のためには，式(4.1)を単に土全体に対する（通常の固体の力学で扱うような）運動方程式と考えてた方がわかりよい．なお，式(4.1)の減衰マトリックスは，Biot の式から来る成分も含まれているが，通常はこれに速度に比例する減衰項を考えるのが普通である．この項は，前項の支配方程式では説明されなかったので，少し説明しておく．

減衰には，内部減衰と外部減衰の二つがある．例として，ばね要素のような2節点の要素についてその成分を書くと，次のようになる．

$$\text{内部減衰：}\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}$$

$$\text{外部減衰：}\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

つまり，内部減衰は両節点の相対速度に比例して生じる減衰で，材料の内部にダッシュポットでモデル化されるような減衰機構がある場合に生じる．これに対して，外部減衰は，たとえば物体が水の中で振動するときのように，考えている領域外との力のやりとりで生じる減衰である．前項の定式化ではこのような機構を最初の支配方程式を作る際に考慮しなかったので，前項で示した FEM に定式化された支配方程式にはこれらの項は含まれていない．内部減衰は釣合式を作る際に変位に対応する応力以外に速度に対応する応力を導入しておけば要素剛性マトリックスとほとんど同じ手順で作ることができるし，外部減衰は右辺の **F** の中に速度に比例する境界力を考えれば導入することができる．しかし，実務では，このような実際の物理量として導入されることはほとんどなく，別の方法で計算されたり，別の目的で用いられる．これについては4.6節で示す．

運動方程式の，時間に関する解法では，二つの方法が良く用いられる．一つは，複素剛性法と呼ばれる周波数領域で解く方法，もう一つは逐次積分といわれる時間領域のまま解く方法である．周波数領域の解法では，時間 t と空間 **x** に関する変数である変位 **u** を次のように変数分離する．

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\sum_i \bar{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x})\, e^{i\omega_i t} \tag{4.3}$$

ここで，$\bar{\mathbf{u}}$ は空間のみの関数である．式(4.3)を式(4.1)に代入し，各振動数ごとの振動の直交条件を用いれば，各振動数成分についての空間のみに関する常微分方程式が得られる．この方法は，式(4.3)が成立する，すなわち，線形の系である場合にしか適用できないという大きな制限があるが，一方では，空間に関する常微分方程式が得られることから，支配方程式が解析的に解けるようになったり，そこまではいかなくても解くのが楽になったりするという長所がある．また，高速フーリエ変換（FFT）の利用，興味の対象となる振動数成分だけしか計算しない，増幅関数の補間などといった計算時間を節約できるテクニックも使える．実務でよく用いられるプログラム SHAKE は一次元という条件を付けて空間方向には解析解を用いているし，FLUSH[59]は空間については FEM という近似化を行い，時間については，周波数領域解析の特徴を生かして計算量を極力減らすことを心がけている．

逐次積分法では，差分法を用いて運動方程式を解く．解法を示す前に，解法の基本的な考え方を示す．運動方程式は物理現象を記述しているので，その解は一つのはずである．しかし，我々が扱う問題では，①外力である地震力は離散化された点（時刻）で与えられている，②離散化された時刻の応答値を求めることが要求されている，という条件があり，この範囲では，運動方程式の解は無限にある．たとえば，特定の時刻について式(4.1)を書き，変位と速度に任意の値を入れ，式が成立する様に加速度の値を求めればそれは，運動方程式の一つの解となっている[3]．これら無限の可能性のある解のうち，最も本当らしいものを求めようとするのが，逐次積分法による求め方である．式(4.3)では，離散化して与えられた点の間の関数形をフーリエ級数で展開した三角関数で近似した（無限項を考えれば正解となる）と考えれられる．

近似化の程度として，最も受け入れられるのは，与えられた外力（地震入力）の離散点の間を直線で結んで時間に関し連続した外力を作ることであろう．すると，一自由度の場合には運動方程式は解析的に解くことができ

[3] ただし，この場合には，離散点として当てられた二つの時刻の間の変化は非常に複雑，すなわち，実際に対応していないものとなっているであろう．

る．このような解法を Nigam の方法[60]といい，数値積分に伴う不安定の問題がないので，応答スペクトルの計算などではよく用いられている．しかし，多自由度系では解析解を求めることが困難になるので，それ以外には用いられない．

差分法として著名なのは，中央差分で，時間の関数 $\mathbf{u}(t)$ を用いて，速度，加速度を次のように表す．

$$\dot{\mathbf{u}}(t)=\frac{\mathbf{u}(t+dt)-\mathbf{u}(t-dt)}{2dt} \tag{4.4a}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t)=\frac{\mathbf{u}(t+dt)-2\mathbf{u}(t)+\mathbf{u}(t-dt)}{dt^2} \tag{4.4b}$$

これは，3点 $\mathbf{u}(t\text{-}dt)$，$\mathbf{u}(t)$，$\mathbf{u}(t\text{+}dt)$を通る応答を2次式に近似したことになる．式(4.1)を時刻 t について書き，式(4.4)を代入しすると，次式が得られる．

$$\left(\frac{\mathbf{M}}{dt^2}+\frac{\mathbf{C}}{2dt}\right)\mathbf{u}(t+dt)=\left(\frac{2\mathbf{M}}{dt^2}-\mathbf{K}\right)\mathbf{u}(t) +\left(-\frac{\mathbf{M}}{dt^2}+\frac{\mathbf{C}}{2dt}\right)\mathbf{u}(t-dt)-\sum\mathbf{M}\mathbf{I}_i\ddot{u}_{gi}(t) \tag{4.5}$$

すなわち，時刻 t と $t\text{-}dt$ の値を基にして $t\text{+}dt$ の値が陽に計算できる．特に，**M** が集中質量マトリックスで **C** が0（または対角マトリックス）であれば，連立方程式を解くことなく運動方程式を解くことができる．また非線形の応力－ひずみ関係を用いたときには，運動方程式の変位項は **Ku** ではなく，**f**(**u**)と表されるが，この場合でも変位が既知であるので，その計算は簡単である．このように中央差分は運動方程式を解くのが簡単であるという特徴がある．このほか，差分法の一般的な解法としては Runge Kutta 法などもあるが，非線形の応力－ひずみ関係を用いる際にはコーディングが複雑になるなどの欠点もあり，通常はそれほど用いられない．

運動方程式は二階の微分方程式であるので，これ専用の差分式が実務ではよく用いられる．先に Nigam の方法の際には外力を部分線形関数と置く近似法であるとした．これに対して，差分法では応答値を近似する．この際，最も単純な近似は，離散点で与えられる応答の加速度が線形で変化するというものであろう．すなわち，

$$\ddot{\mathbf{u}}(t+\tau)=\ddot{\mathbf{u}}(t)+\frac{\tau\{\ddot{\mathbf{u}}(t+dt)-\ddot{\mathbf{u}}(t)\}}{dt}\quad(0\le\tau\le dt) \tag{4.6}$$

変位と速度はこれを積分すれば得られる．時刻τ=dt について，変位，速度，加速度を求め，式(4.1)に代入し，整理すると，変位増分 $d\mathbf{u}$ に関する連立方程式が得られる[4]．

$$\left(\frac{6\mathbf{M}}{dt^2}+\frac{3\mathbf{C}}{dt}+\mathbf{K}\right)d\mathbf{u}=\mathbf{M}\left(\frac{6\dot{\mathbf{u}}(t)}{dt}\right) +\mathbf{C}\left(3\dot{\mathbf{u}}(t)+0.5\,dt\,\ddot{\mathbf{u}}(t)\right)+\sum\mathbf{M}\mathbf{I}_i\,d\ddot{u}_{gi} \tag{4.7}$$

この方法は，加速度応答を部分線形関数に仮定しているので，線形加速度法と呼ばれる．中央差分法との大きな違いは，解くべき時間の応答値を含んだ近似化を行っているので，必ず連立方程式を解く必要があることである．中央差分のような方法を陽解法，これに対して線形加速度のような方法を陰解法という．線形加速度法は数値積分に伴う誤差も小さく優れた方法であるが，実務ではそれほど用いられない．これは，後に述べる数値積分の安定性の問題があるからである．この方法をより一般化したものに，Newmark のβ法と Wilson のθ法がある．Newmark のβ法では，時刻 $t\text{+}dt$ について速度および変位を次のように表わす．

$$\dot{\mathbf{u}}(t+dt)=\dot{\mathbf{u}}(t)+(1-\gamma)\,dt\,\ddot{\mathbf{u}}(t)+\gamma\,dt\,\ddot{\mathbf{u}}(t+dt) \tag{4.8a}$$

$$\mathbf{u}(t+dt)=\mathbf{u}(t)+dt\,\dot{\mathbf{u}}(t)+(0.5-\beta)dt^2\ddot{\mathbf{u}}(t)+\beta dt^2\ddot{\mathbf{u}}(t+dt) \tag{4.8b}$$

この方法は，γとβにより各種の補間関数形が選べる．ここで，γ= 0.5，β = 1/6と置くと線形加速度法となる．実務的には，γ= 0.5とβ = 1/4の組み合わせがよく用いられる．この組み合わせでは，積分区間で加速度を一定に仮定したことに相当し，中点加速度法などの名前で呼ばれることがある．

Newmark のβ法が，積分区間での関数形を変えようとしたのに対し，Wilson のθ法では，応答を線形であると仮定する区間を t～$t\text{+}\theta\,dt$ まで広げるもので，θ=1であれば，線形加速度法と同じとなる．この方法では，式(4.6)の dt を$\theta\,dt$ と置き換えた式を作り，解いた後で，$t\text{+}dt$ までの応答を求める．

系が非線形の場合には，これ以外に，予測子・修正子法というのもよく使われる．これは，非線形の応力－ひずみ関係モデルによっては，接線剛性が計算できず，したがって，Newmark のβ法などの適用が困難なケース（接線剛性の計算を主体的に行わない考えもある），Newmark のβ法を適用する際に仮定した剛性と実際の剛性の差が大きくなるので不釣り合い力を計算を行っている時間増分の中で小さくしたいケース，などに用いられる解法で，時刻 t から $t\text{+}dt$ までの応答を既知の量で推測し（予測子），次に時刻 t+dt で運動方程式が成立するようにイタレーションを行う方法である．イタレーションの際には，時刻 t における応答値以外に，イタレーションの途中の結果なども反映し，なるべく早く収束する様な応答予測が（修正子）行われる．これらの方法は，非線形方程式の解法と密接に関係しているが，ページ数の関係からここでは示さない．

[4] 多くの教科書では，加速度について連立方程式を作る方法が示されているが，実務的にはこの方が使いやすい．これは，変位について解くと，**M**，**C** は変えず，**K** を変えることにより連立方程式の係数行列が作れるからである．このためには，変位，速度，加速度の補間式から，加速度と速度を変位で表すように変形し，式(3.1)に代入する必要がある．

逐次積分の方法がこのようにいくつもある理由は，手法の選択の基準が一つではないからである．通常，①計算やコーディングの手間，②計算の精度，③安定性が考慮すべき要因である．このうち，計算の精度は数値積分の時間間隔を小さくするなどすれば，よくすることが出来るので，プログラムのコーディングの際の検討事項に入ることは少なく，一方，実務では，数値積分の時間増分は与えられた地震動により決まってしまうのが普通で，最もなおざりにされている事項であるし，判断することも困難である．したがって，実務では①と③が重視される．このうち①についてはこれまでの説明である程度明らかであろう．この面では陽解法である中央差分は陰解法よりずっと優れている．しかし，数値積分の安定性という面ではとても優れているとは言えない．なお，数値積分法の詳細に付いては，たとえば，文献19，20などを参照されたい．また，文献15や21にはわかりやすい説明もある（最近，このようなユニークな本をあまり見ない）．

数値積分を行っていると，急に応答値が無限大に大きくなることがある．これが不安定現象である．不安定現象は，数値積分の時間増分と密接に関係しており，不安定現象が起こらない数値積分の時間間隔は，減衰の無い系で，中央差分法，Newmark のβ法でそれぞれ次のようになる．

$$dt \le \frac{2}{\omega}, \qquad dt \le \frac{2}{\omega\sqrt{1-4\beta}} \tag{4.9}$$

ここで，ωは系の最大円振動数である．Newmark のβ法で β = 1/4がよく用いられるのは，これが不安定現象が起こらない（無条件安定）最小のβの値である．中央差分法では無条件安定の方法は無い．また，線形加速度法が，数値積分の精度もよく，昔の文献にはよく出てくるにも関わらず，現在ほとんど使われないのもこれが原因である．つまり，コンピュータがそれほど発達していなかった時代では，たとえば建物の地震応答を計算するのに，一つの階を一つのばねに置き換えたり，いくつかの階を一つのばねに置き換えたりした．このようなモデルでは最大円振動数は小さく（最小固有周期は長く），線形加速度法でも式(3.9)の条件を満たすことが出来た．しかし，FEM が使われるようになり，メッシュのサイズが小さくなると最小固有周期は小さくなり，よく用いられる0.01秒というような時間増分では式(4.9)を満たすことが出来なくなってきたのである．

Wilson のθ法では，無条件安定の条件は，$\theta \ge 1.37$である．この方法ではθを大きくすると，数値積分の誤差が急激に大きくなるので，せいぜい1.4までの値しか使われない．

式(4.9)の条件が満たされていないと必ず発散する（不安定現象が起きる）かというと，必ずしもそうではない．さらに，発散が起こらなければ正解であることが知られている．これは，計算結果を見ていると，発散するときにはほんの数ステップの計算で，応答が無限大になってしまうので，このようなことが起こらなければその結果は数値積分の観点からは信用してよいということを意味している．つまり，たとえば最大応答が10^{20}の様な大きな値が得られたとしても，これが有限な値であれば，それは不安定現象が起こったためではなく，実際にそのような挙動をしているのか，コーディングやデータ作成に誤りがあったためと考えられる．なお，式(4.9)には無条件安定のための条件が示されているが，特に非線形解析では，この条件を満たしているにも関わらず，発散した例が（特に Wilson のθ法では）少なからず報告されている（たとえば文献61）．この原因は筆者には不明である．また，安定していることが良い近似解ではないことは当然であるが，たとえば文献62には極端な例も示されている．

逐次積分法による数値積分では，変位の時間に関する関数形を規定したわけで，その代わりとして，人為的な減衰が発生する．つまり，無減衰の系を解いたとしても応答は次第に小さくなっていく．これを数値減衰と呼ぶ．数値減衰は，高次の振動ほど減衰が大きく，通常の実務の範囲では，興味のあるような振動数領域ではその影響はかなり小さい．また，特に Wilson のθ法は減衰が大きい[63]．これは，数値積分の誤差という観点から見れば問題であるが，数値計算の安定性という観点からは好ましいこともある．たとえば非線形計算などで，不釣り合い力を考慮すると，数値計算上は衝撃的な力を加えたことになり，加速度がノイズのように乱れる現象がよく見られる（7.4節参照）．これは，実現象とは異なることなので，応答から消した方が好ましい．数値減衰が大きければ，自然にノイズを抑えてくれる．Wilson のθ法は，同じ無条件安定の手法である中点加速度法に比べれば数値計算の誤差も大きく，安定性の問題があるときもあるにも関わらず，液状化解析ではしばしば使われるのは，この辺の事情によると考えられる．

4.2 重複反射理論

運動方程式を周波数領域で解くと，支配方程式が空間に関する常微分方程式となり，扱いが楽になることは前項で示した．この性質が最も生かされているのが，SHAKE で用いられている重複反射理論である．SHAKE では一次元問題を考えているが，下方から入射してくる地震波は，剛性の異なる層の境で反射をするので，挙動を追跡するためには，逐次これを追跡する必要がある．

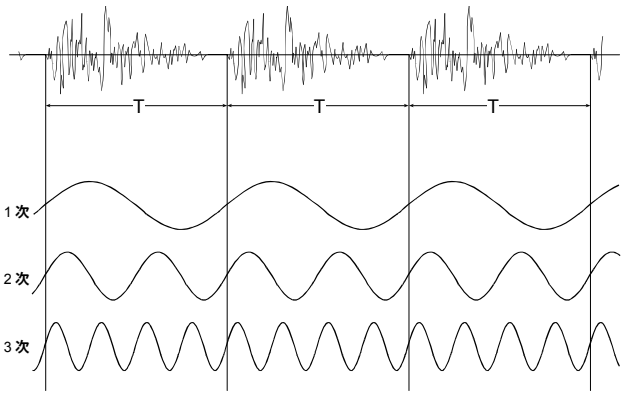


図-4.1　フーリエ変換のイメージ．フーリエ変換では積分時間 T で周期的に変化する関数を考えたことになる．

ところで，式(3.3)で示した方法で，周波数領域で運動方程式を解くには，有限フーリエ級数展開を用いる必要がある．これは，図-4.1に示すように，考えている数値積分区間が無限に繰り返された周期関数に置き換えたことに等しい．すると，各周波数成分については，定常状態を考えていることに等しくなる．定常状態であれば，層の境での反射・透過波は常に一定で，それぞれ次のような漸化式で表せる．

$$E_{m+1}=\frac{1}{2}E_m(1+\alpha_m)e^{ik_m h_m}+\frac{1}{2}F_m(1-\alpha_m)e^{-ik_m h_m} \qquad (4.10a)$$

$$F_{m+1}=\frac{1}{2}E_m(1-\alpha_m)e^{ik_m h_m}+\frac{1}{2}F_m(1+\alpha_m)e^{-ik_m h_m} \qquad (4.10b)$$

ここで，E，F は入射波と反射波の振幅，αはインピーダンス比 k は波数，h は層厚である．これに，層境における変位と応力と連続条件，地表面における境界条件（入射波=反射波），および入力地震動の振幅を条件として与えれば支配方程式を解析的に解くことが出来る（詳細な式の誘導に関しては，たとえば文献64参照）．このような理論を重複反射理論と呼び，フーリエ級数展開と，一次元という特徴を生かした解法である．多次元解析では，このようなこのような手法を使うことは非常に困難で，したがって，SHAKE と兄弟のように扱われている FLUSH では空間に関しては有限要素法を用いており，数値計算の立場から見れば全く異なる解法となっている．

4.3　応力の扱いと数値積分

前項で述べた運動方程式の解法から，周波数領域の解析は線形の系にしか適用できないことがわかった．一方，逐次積分法は線形の系でも非線形の系でも使うことが出来る．線形の系で非線形の効果を取り入れるためには，等価線形化法がよく用いられる．たとえば SHAKE や FLUSH では，計算に用いる線形な系の材料特性は，最大ひずみγ_{max} に対して

$$\gamma_{eff}=\alpha\gamma_{max} \qquad (4.11)$$

で計算される有効ひずみγ_{eff} に対応する値であるとしている．式(4.11)の関係は陽には決まらないので，これを満たすまでイタレーションを行う．

等価線形法は，周波数領域の解析だけではなく，逐次積分でも行うことが出来る．必要なことが考慮されていれば時間領域でも周波数領域でも結果は変わらない．これに対して，非線形の応力－ひずみ関係を考慮しながら挙動を追跡することは逐次積分法でしか行うことは出来ない．等価線形法に対して，このような方法を非線形法と呼ぶ．等価線形化法，非線形法のいずれも応力－ひずみ関係は非線形であるとしているので，呼び名が紛らわしい様に見えるが，原理を考えれば混乱することはない．

表-4.1に各種の解法に用いられる基本的な考えをまとめている．なお，ここで，ダイレタンシーの考慮の項は，地震応答の途中にダイレタンシーによって起こる材料特性の変化を陽に考慮することを意味している．「地震応答解析に用いる地盤物性」で示した様に，せん断ひずみに伴う材料の非線形性を表すのに最も普通に使われる G-γ関係，h-γ関係には，ダイレタンシーの効果が含まれているが，このようなケースを指しているわけではない．

最初に非線形法で用いられる仮定を考える．最も厳密な方法は，有効拘束圧が変わるごとにこれを反映して材料特性[5]を変える方法である．これを有効応力解析と呼ぶ．有効応力解析を行うためには，Biot の式を支配方程式とする必要がある．

これに対し，地震動は，正負の繰返し載荷を伴うので，有効拘束圧も平均値の付近で正負の振動をしているだけだと考えれば，最初の近似として，材料特性は平均値（正確には地震前の値）で評価し，地震中は変わらないと仮定することが出来る．このような手法を全応力解析と呼ぶ．名前は全応力が使われているが，材料特性は有効応

表-4.1　地震応答解析に用いられる解析法と支配方程式・材料特性の関係

解析法	ダイレタンシー	材料特性	非線形の扱い	支配方程式
有効応力解析	考慮	逐次変化	非線形法	二相系
	考慮しない			一相系
全応力解析	考慮しない	一定（地震前の値）	非線形法	
			等価線形法	

[5] 材料特性という用語はやや曖昧である．厳密な定義は困難であるが，有効拘束圧に依存して変化する量，すなわち，弾性定数やせん断強度と捉えるのがわかりやすい．これに対し，後で示す，非線形・等価線形の議論でも時間ごとの材料特性の変化を論じているが，ひずみに依存した非線形性を論じている．つまり，せん断弾性定数やせん断強度は一定であるが，ひずみの大きさにより接線剛性が変わるような問題を扱っている．

力で評価されていることに注意されたい．材料特性を全応力で評価することは絶対といってよいほど行われない．たとえば，材料試験のうち，三軸試験では，繰返し軸方向応力を加えているので，試験中に有効拘束圧は振動している．しかし，これを整理するときには，初期有効応力下における材料特性として表現している．この考えと，全応力解析は，基本的に一致する考えであろう．平均値の回りで有効拘束圧が変化する場合であれば，全応力解析は有効な近似であるといえる．この近似の精度が落ちるのは，振動の中間値が時間とともに変化する場合である．たとえば液状化や圧密解析の場合がこれに相当し，前者では時間とともに有効応力が減少するし，後者では増加する．したがって，これらの解析では，全応力解析の精度は悪く，挙動追跡の目的では実用的には用いられることは無い．

地震応答解析に議論を絞れば，有効応力解析が絶対に要求されるのは，液状化解析のように構成則でダイレタンシーを考慮している場合である．乾燥状態でも，ダイレタンシーを考慮すると有効拘束圧（の中央値）は単調に変化することが多い．しかし，ダイレタンシーを考慮すると，構成則は煩雑になる．したがって，液状化のようにダイレタンシーの考慮が必須なケースを除けば，地震応答解析で重要なのはせん断挙動であることから，ダイレタンシーを考慮しない構成則を使うことも考えられる．この場合，支配方程式は二相系，一相系どちらも使い得る．しかし，ダイレタンシーを考慮しないと，地震の作用時間程度では間隙水の流れる要因は余りない（圧密解析ではある）ので，二相系の式を使う必然性は少なく，実用的にも行われていない．一相系の式では，間隙水との連成を考えていないので，透水により有効応力が変化する場合には誤差は非常に大きいが，たとえば構造物の直下で構造物のロッキングによる拘束圧の変化を考慮したいケースなどでは理論的には使われてもよい解法であろう．また，この方法は，一次元解析・非線形全応力解析と相通じるものがあり，完全に使われないわけではない．その意味では，本来全応力解析に分類すべきものかもしれない．したがって，地震応答解析では，有効応力解析といえば，材料のダイレタンシーを考慮して Biot の式を非線形法で逐次積分しながら解いていることを意味すると捉えるのがわかりやすい．

全応力解析では，非線形法と等価線形法がある．非線形法は有効応力解析のダイレタンシーを考慮しない，一相系の式との違いは，材料特性を地震前の有効応力に基づいて決めているか，地震中の有効応力の変化を考慮しているかである．一次元の問題では，鉛直方向と水平方向の運動方程式が（ダイレタンシーを考慮している場合でも）分離できるので，非線形法が使われるケースは多々ある．実際，多くの一次元の液状化解析プログラムでは，全応力解析というフラグを用意し，この解析を行なうことが出来る．ところで，一次元の問題では，構成則にダイレタンシーを考慮しなければ，有効拘束圧は変わらない．したがって，非線形法に基づく全応力解析は，ダイレタンシーを考慮しない有効応力解析と呼ぶこともできる．このように，ダイレタンシーを考慮しないケースでは，有効応力解析と全応力解析の境界はかなり曖昧なものである．中間的という意味では，たとえば液状化に伴う過剰間隙水圧や有効拘束圧の変化を別の方法で計算し，これを入力として取り込みながら一相系の全応力解析を行う手法も提案されている[65)66)]．この手法は，応答変位法のように地盤と構造物の相互作用をばねで代表させるような手法で，液状化の過程を追跡するような手法では主流となっている．

等価線形法を使う場合には，材料特性は線形に限られるので，必然的に材料特性は地震前の値で代表せざるを得ない．ということは，全応力解析しか使えないことになる．液状化の効果も考慮して行う試みも無いわけではないが，現在でも曖昧な「等価」の意味[6]がさらにはっきりしなくなるし，一意的に線形な系を作ることは困難なようである．

4.4 境界条件

地震応答解析では，境界の設定も困難なことが多い．ほとんどの解析では，地震波は鉛直下方から入射するとしている．地震動の観点からは地震基盤（Vs≥3km/s：断層からの距離だけが支配要因）や工学的基盤（Vs≥700m/s）が好ましいが，一方ではそこまでの情報が得られていることはまれである．そのため，（実用的）工学的基盤として Vs≥350m/s（N 値50程度）が使われることが多い[67)]．解析的には，インピーダンス差がある層の間で，下層が非線形挙動をしない部分をとればよいが，実務ではこのような検討も十分行われず，ボーリング調査で入手した情報のみで決めることも多い．

下方の境界は，それでもまだ判断基準が作れる．これに対して，側方の境界は明瞭な材料的根拠は無く，興味

[6] 数学的は，等価という用語は，見掛けは違うが本質は同じであるものに対して用いられるが，ここでは近似解法を等価と呼んでいるだけである．最近では，これに輪を掛けて，地盤工学の分野では，線形の系に置き換えることを等価と呼ぶことも多く，実際の意味とはかけ離れたイメージとなっている．逆に等価という用語をつけることで，精度がよいような印象を与え，ネーミングの勝利ともとれる．最近，これに限らず，何でも「等価」と言う語を付ける傾向があり，閉口している．

の対象としている範囲に影響を与えない様な遠方という曖昧な経験則しかない．境界を通じての地震動の入射もあるはずであるが，境界は，外部にエネルギーを伝達するだけの役目としてモデル化し，さらにその際には境界の外部は水平成層が仮定される．

図-4.2に良く用いられる境界を示す．フリーや水平ローラー境界は荒いようではあるが，側方に十分な範囲を取って解析していれば十分な精度が得られる．

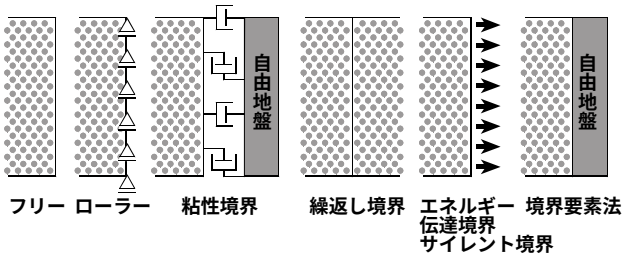


図-4.2　側方境界の種類

側方が水平成層であるという条件下では側方境界（特殊なケースを除けば下方境界も）は，周波数に依存した性質を持し，与えられた条件下で厳密解となるエネルギー伝達境界もある．しかし，周波数依存性を考慮すると，周波数領域の解析しか出来ず，したがって，非線形法による解析は出来ない．サイレント境界という波動を吸収するための境界条件がいくつか提案されている[68)69)70)]が，時間領域解析に使える完全な境界はない．最も多く用いられるのは，粘性境界（ダッシュポット）[71)72)]であるが，境界に直交する波動に付いては厳密解（したがって，下方境界はかなり精度がよいモデルとなっている）であるが，斜め入射に付いては誤差が大きくなる（したがって，側方境界では精度が悪い）．表面波は各周波数成分について粘性係数を調整すれば完全に吸収できるが，時刻歴解析ではこの様な定式化は不可能である．攪乱領域から水平方向に伝わる波は Rayleigh 波が多いが，この点からも，側方境界に関してはダッシュポットは精度が悪い．境界要素法は弾性の地盤しか扱えないので，非線形解析ではほとんど用いられない．繰返し境界は複雑な境界条件設定の手間を省くために，左右の境界の変位が同じになるようにするものである．境界条件の設定は楽であるが，攪乱範囲が境界を通して自身に返ってくるので，フリーやローラー境界と同様，ある程度解析範囲を広く取る必要がある．

境界条件の問題は，表面波の解析を非常に困難にしている．表面波の解析は周波数領域で行わざるを得ず，時間領域では行われていない．

地震動が斜め入力する場合も，ほとんど解かれていない．多入力問題としての定式化[73)74)]，境界要素法とのカップリング[75)]などが提案されているが，一方では入力地震動の把握の問題があることも原因と考えられる．

4.5 周波数領域と時間領域

周波数領域の解析では，線形な系しか扱うことが出来ないので，地震応答解析では，非線形法による解法の方が厳密である．しかし，常に周波数領域の解法がよいかというと，決してそうではなく，周波数領域の解法でしか出来ないこともある．一つは散乱の減衰のように，周波数に依存した減衰が現象としてあり，これを考慮する場合である．また，周波数領域の解法にすることによって，例えばエネルギー伝達境界のように，解析的に解けるようになったり，扱いが簡単になったりするケースである．もう一つは，重複反射理論による deconvolution という，地表で観測された地震波から，入射波を求める様な作業が出来ることである．

最後の部分は特に大切で，このため，いくら非線形法による解法が一般的になっても，等価線形法は消えてしまうことはないと考えられる．このため，等価線形法を改良しようとする研究[76)]も行われている．また，非線形解析で deconvolution を行う試みもある[77)]．

等価線形法の欠点は，例えば，加速度を過小評価し，一方では過大評価することである．これは矛盾しているようであるが，メカニズムが異なる．

等価線形法では，系の最大応答に対応した剛性や減衰を用いる．これは，小さい振幅の振動，すなわち，高周波数の振動に関しては，低い剛性と高い減衰を用いたことになり，高周波数成分の応答を過小評価する．この点を改良する方法も提案[76)]されているが，現象に着目しただけの方法であり，物理的な裏付けが今後の改題であろう．

一方，ひずみが大きくなると，別の要因が支配的になる．図-4.3に模式的に示したように，等価線形化法では，最大ひずみより小さいひずみ（有効ひずみ）で剛性を仮定し，最大ひずみまで延長する．したがって，大きいひずみ領域に対しては，せん断応力を過大評価し，したが

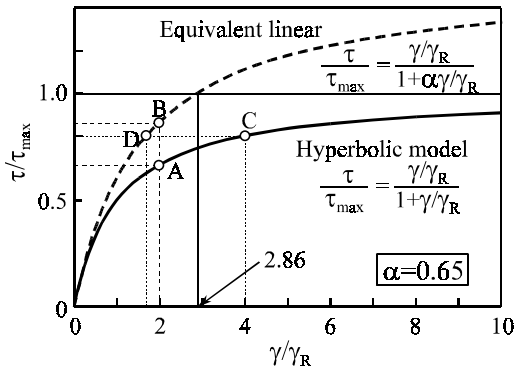


図-4.3　　双曲線モデルを用いたときの応力－ひずみ関係の入力値（実線）と最大値出力（波線）の関係

って，加速度も過大評価する．このような現象については，文献78でまとめたので，これを参照されたい．等価線形と非線形法を比べた論文は過去にいくつかあり，いずれも等価線形法が大きな加速度を示しており，これを線形である故の共振現象で生じたと説明しているものが多いが，筆者はこれは誤りで，図-4.3に示したメカニズムが原因と考えている．

一般的に，小さい地震動に対しては，前者の影響が大きく，大きな地震動に対しては，後者の影響が大きい[79]．後者の影響は，小さい地震記録をシミュレーションしている範囲では現れないものであり，これまでは余り議論されていない．いずれにしろ，等価線形法はもう少し改良の可能性がある．

4.6 減衰

減衰マトリックスの性質についてはすでに述べた．このときにも示したが，この減衰がどこから来るかということは余りわかっているとは言えない．また，実務では応答の調整代として使われることも多い．典型的なのが，地下逸散減衰を考慮できない境界条件を用いたとき，この効果を内部減衰として考慮する方法で，上部構造では多く用いられている．

実務的に最も用いられるのは Rayleigh 減衰である．これは，全く人為的な減衰で，減衰マトリックスを

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \tag{4.12}$$

として作成する．しかし，要素ごとにαとβを定義するのなら，要素の減衰を反映させることも出来る[80]．この減衰は，各振動モードの振動に与える減衰が異なり，i次のモードに対する減衰h_iは，対応する円振動数ω_iの関数として，次式で表される．

$$h_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \tag{4.13}$$

この性質を利用し，振動が乱れることの多い高次の減衰を押さえるために剛性マトリックス比例部分が使われることが多い（7.4節参照）．なお，式(4.13)の形から Rayleigh 減衰が周波数依存減衰と説明されることがあるが，これは誤りで，各振動モードごとに異なる減衰を与えているわけである．

各要素のひずみエネルギーに比例した減衰からモード減衰を求める方法，モード減衰から減衰マトリックスを求める方法も提案[81]されているが，Full matrix となることから，自由度数の多い地盤の解析ではほとんど用いられない．

● 地震応答解析の実例

この章では，筆者らが行ってきた地震応答解析の実例を通して，その適用性を検討する．

5.1 全応力解析の実例

1983年8月8日の神奈川県・山梨県境地震（M=6.0，震源深さ22km）の際の記録のシミュレーションである[82]．地震は小さいが震央距離18km と震源近くで記録が得られている．この記録は，筆者の知る，最もひずみが大きく，かつ液状化とは関係のない事例で，鉛直アレー記録の得られているものの一つである．

図-5.1に柱状図と各種計算法による最大応答値を示す．また，図-5.2に加速度時刻歴を示す．

ここで用いた解析は，一次元解析で，等価線形解析，杉戸による改良等価線形解析[76]の二つの等価線形解析と，三つの非線形解析（双曲線モデル，Ramberg-Osgood モデル，および筆者の提案した，*G*-γ, *h*-γ関係が完全に満たされるモデル[29]）である．図-5.3に非線形特性を比較して示す．このサイトでは，地盤がスコリアということもあって，動的変形特性試験は行われていない．ここで用いたのは，岩崎らの提案による粘性土に関する材料特性である．

図-5.4に代表的な層の応力－ひずみ関係を示す．ここで，等価線形解析では，複素剛性による部分を考慮して履歴を描いている．SHAKE ではこのような出力が無く，応力

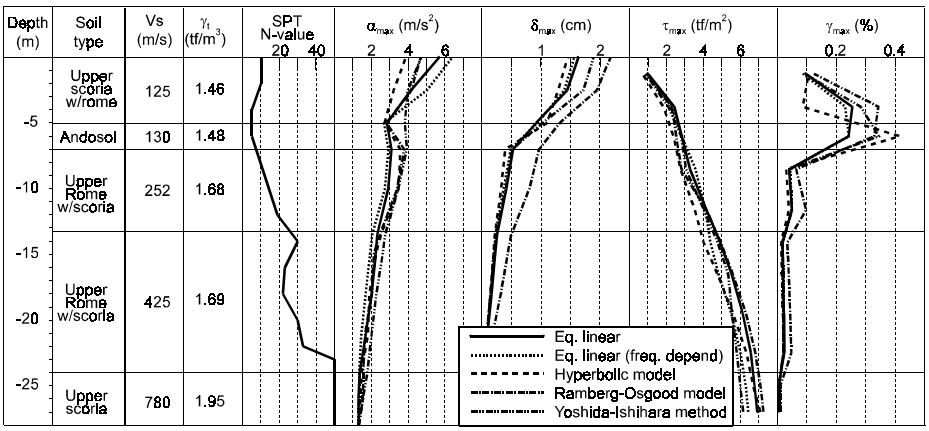


図-5.1　柱状図と最大応答値

－ひずみ関係は線形である．

この記録は，大きなひずみといったが，図-5.5にまとめた各種材料の非線形性と，試験法，解析法のまとめを見ると，最大ひずみはやはり等価線形法の適用範囲からほとんど離れていない．したがって，等価線形法でもかなりの精度の良い計算が出来ている．このことは逆に改良等価線形法の一致度が悪くなる結果となっている．つまり，前章で示した二つの要因のうち，非線形性の影響が勝ってきたわけである．このことは，仮定したτ-γ関係と計算で得られた応力－ひずみ関係の差を見れば明らかであろう．

非線形法では，モデル化の差が明瞭に現れた結果となった．R-O モデルは，最大応答付近ではτを大きめに評価し，一方，双曲線モデルではτを小さめに評価した結果が明瞭である．特に双曲線モデルではτはかなり強度に近く，これが加速度応答の小ささとなって現れていることが明瞭である．双曲線モデルは減衰が大きいので増幅が小さくなると説明されることが多いが，この結果を見ると，減衰ではなく，せん断強度の評価が小さいことが原因であることが明瞭である．

地震応答解析の結果を評価するためには，加速度や応

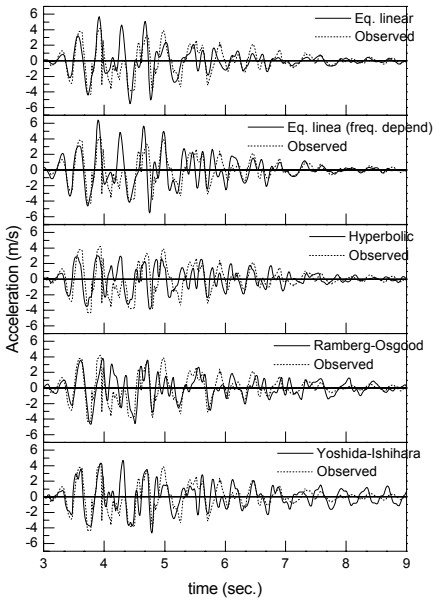


図-5.2　加速度時刻歴の比較

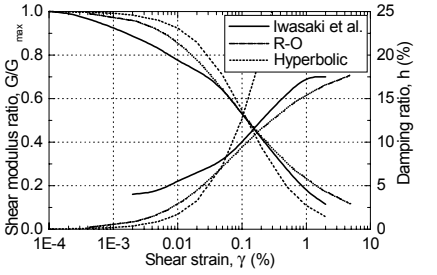


図-5.3　動的変形特性の比較

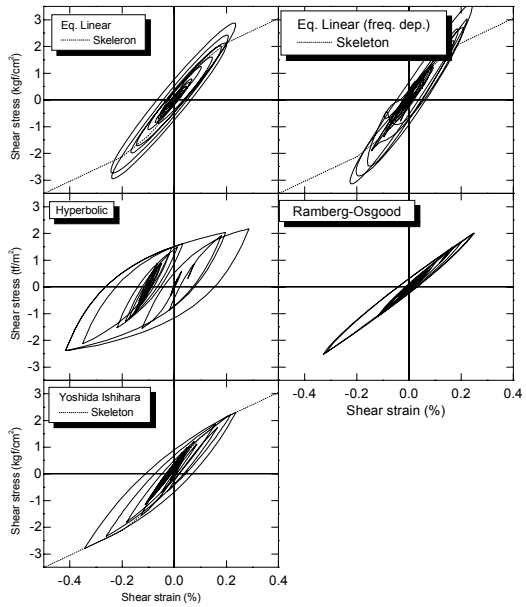


図-5.4　応力－ひずみ関係の例

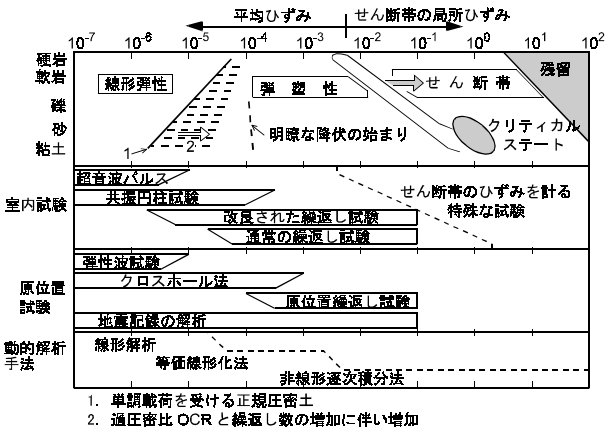
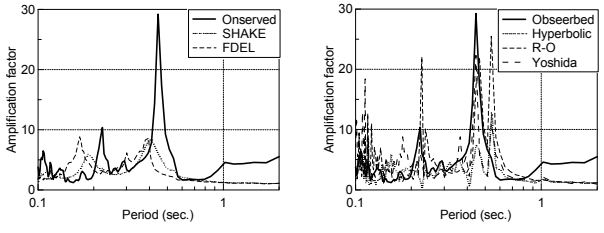
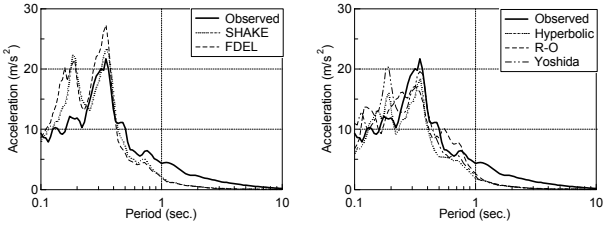


図-5.5　地盤材料の非線形性と計測方法・解析手法（文献83，84をまとめたもの）



(a) 等価線形　　(b) 非線形

図-5.6　地表の基盤に対する増幅比



(a) 等価線形　　(b) 非線形

図-5.7　応答スペクトル

力－ひずみ関係だけでは明らかに不十分で，増幅比，応答スペクトル，さらには変位など多くのものを検討する必要がある．図-5.6に増幅比を図-5.7に地表の加速度時刻歴から計算した応答スペクトルを示す．なお，図でSHAKE，FDEL としているのは実際に SHAKE と FDEL を使って計算したものではなく，筆者らが開発し，公開している DYNEQ[85]で計算したものである．これらの名前は，普通名詞として捉えている．増幅比で見ると，等価線形系の解析は0.5Hz 程度の大きな増幅を逃しているのに対して，非線形系の解析では良く表現できていることが特徴的である．応答スペクトルでは等価線形系の解析が大きめの評価をしているのに対して，非線形系の解析は全体的に観測値に近い．

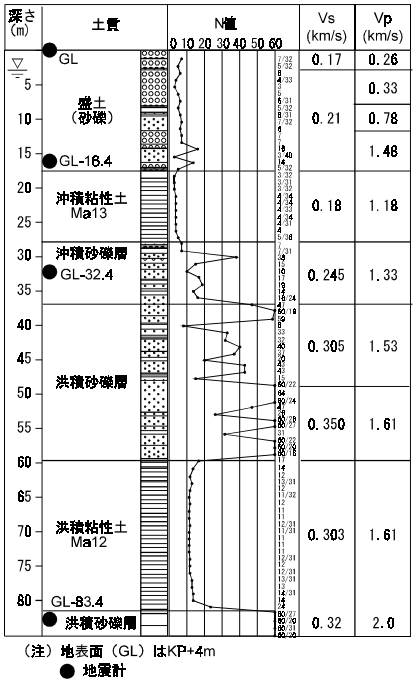


図-5.8　地震観測位置の柱状図（V_s，V_p は文献86をもとに推定したもの．）

5.2　有効応力解析の例

1995年兵庫県南部地震の際ポートアイランドで記録された鉛直アレーの解析を行う[87]．図-5.8に柱状図，図-5.9に観測された地震記録を示す．この地点の埋土（マサ土）の厚さは約18m であり，その下には沖積粘性土（Ma13）があり，さらに沖積砂礫層，第1洪積砂礫層，洪積粘土層（Ma12），第2洪積砂礫層と続いている．地震計は地表と GL-16.4m，32.4m，83.4m に設置されている．記録で特徴的なのは，上下成分は地表に行くにしたがって増幅しているのに対し，水平成分は振幅が次第に小さくなり，また短周期成分が見られなくなることである．これは，強い水平動により非線形挙動が卓越した結果と考えられる．

(1) 地盤のモデル化

ここでは GL-32.4m の地震計より上の NS 成分を解析する．地盤は Hardin-Drnevich モデルでモデル化する．また，剛性や強度は拘束圧依存性を考慮してモデル化する．この際，有効拘束圧 σ'_m が必要な場合には，静止土圧係数 K_o を0.5として計算した．さらに，地下水位は GL-3m に設定し，単位体積重量は文献[88]を参照し決定した．

①沖積砂礫層（GL-28～37m）

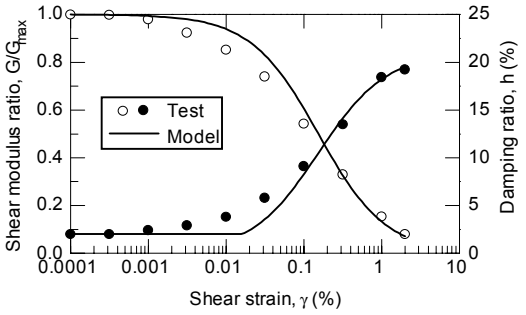


図-5.10　沖積粘性土のひずみ依存性

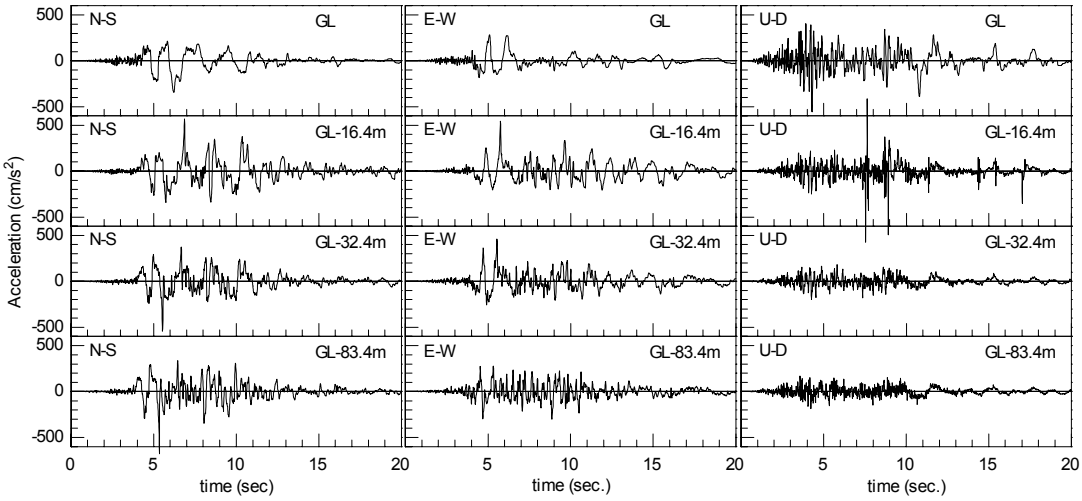


図-5.9　ポートアイランドで得られた地震記録

$G_{\max} = 831\sigma'^{0.5}_m$ (kgf/cm^2)

内部摩擦角　ϕ=32.3°

最大減衰比　h_{max}=22%

この層が液状化した可能性も指摘されている[89]が，その影響は考慮しない．

②沖積粘性土（GL-18～28m）

この粘性土はほぼ正規圧密状態にある[90]．

$G_{\max} = 448\sigma'^{0.5}_m$ (kgf/cm^2)

$c = q_u/2 = 0.72\log G_{\max} - 1.12$ (kgf/cm^2)

$h_{max} = 21\%$

③埋土層（地表～GL-18m）

$G_{\max} = 1000\sigma'^{0.5}_m$ (kgf/cm^2)

内部摩擦角　ϕ=22.5°

最大減衰比　h_{max}=23%

液状化強度は，地震前に行われた不撹乱試料による液状化強度試験結果を参考にして決めた．

(2) 解析法

解析手法は，実務でよく使われるという観点から選んだ．等価線形解析，全応力非線形解析，および有効応力解析の，計3つの解析を行う．

等価線形解析はこれまでに示した定数で計算が可能である．全応力非線形解析は双曲線モデルを用いるので，減衰特性を使わないことにすればモデル化が可能である．有効応力解析では液状化に関するパラメータを除けば，やはりモデル化が可能である．

図-5.12に液状化強度を実験と比較して示す．用いたパラメータは B_p=2.5，B_u=0.18である．マサ土は細粒分を多く含んでいるので，透水性は小さいと考え，解析は非排水条件下で行う．

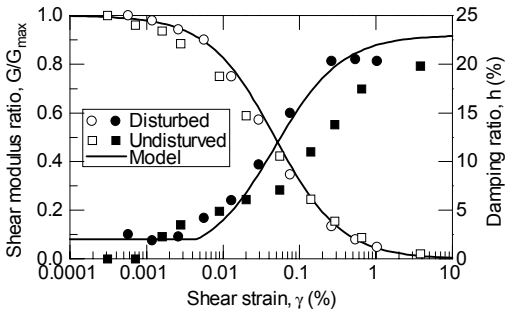


図-5.11　埋土のひずみ依存性

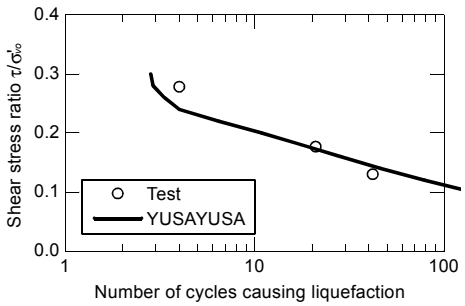


図-5.12　液状化強度の比較

(3) 解析結果と考察

NS 方向を解析する．図-5.14に最大応答値，図-5.13に GL およびGL-16.4mの加速度時刻歴を計測値と比較して示す．

まず最大応答値を見ると，地表面加速度では等価線形解析が309cm/s^{2}で他の解析より大きい．また，せん断応力も大きい．これはこれまでにも指摘されている現象である[78]．計算による最大加速度はいずれの場合も観測値より小さいが，これは後に示すように観測値ではパルス上の非常に大きい加速度の部分があるのに対し計算では全体になめらかな形状となっているためである．

全体としての特徴は，粘性土の部分で加速度の値が非常に小さくなっていることが挙げられる．最大変位および最大せん断応力の分布を見ると，この部分ではひずみも大きく，大きな非線形挙動をしたことが分かる．最大

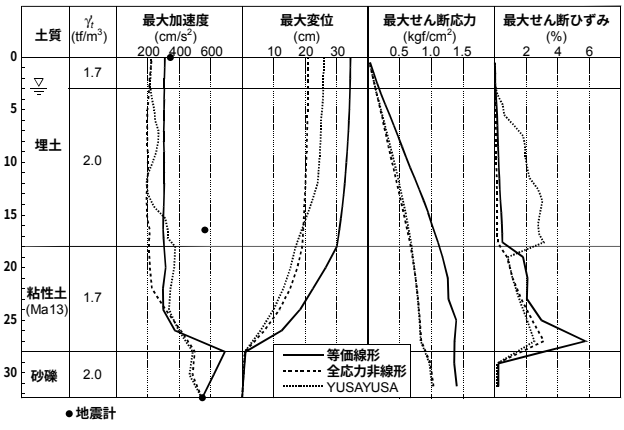
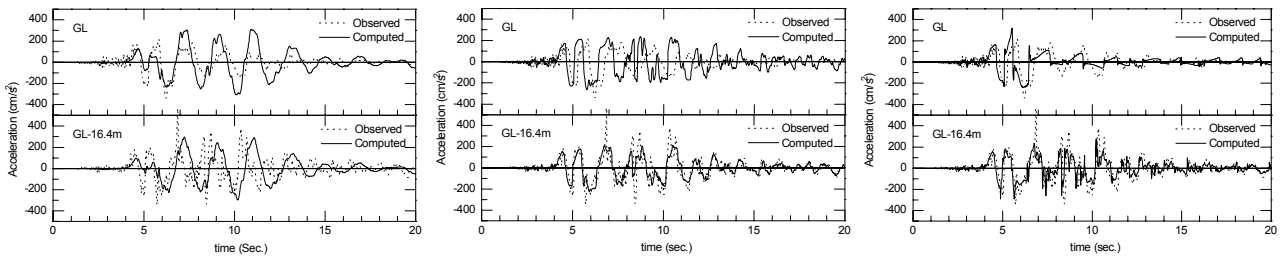


図-5.14　最大応答値の比較



(a)等価線形解析　(b)全応力非線形解析　(c) YUSAYUSA

図-5.13　加速度時刻歴の比較

応答値は粘性土地盤の挙動に大きく影響されている．

最大せん断ひずみ分布では，埋土層で全応力解析と有効応力解析に大きな差が見られ，有効応力解析が大きな値となっている．これは，有効応力解析では過剰間隙水圧の発生を考慮しているので，剛性がより小さくなったからである．

次に，時刻歴を比較する．全体として見れば，どの解析も観測値との一致度はかなりよい．しかし，詳細に観察すると，解析ごとに特徴があることが分かる．なお，図-5.15に示されるように，有効応力解析では5秒付近で過剰間隙水圧が急激に発生し，液状化に至っている．

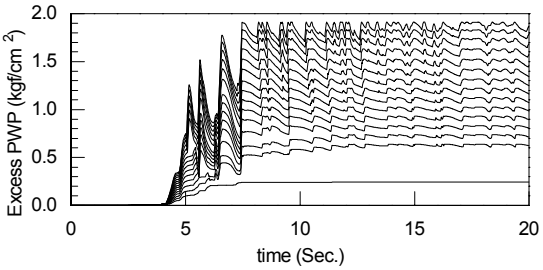


図-5.15　過剰間隙水圧時刻歴

まず，5秒付近の最初の大きな波に対する応答を見る．等価線形解析では地表の位相はよく一致しているが GL-16.4m では対応していない．これは，粘性土の剛性を小さく，埋土の剛性を大きく評価したためである．後者については過剰間隙水圧の発生を考慮していないことから当然の結果といえる．全応力非線形解析では，立ち上がりのみならず全体的に GL-16.4m の位相の対応がよく，粘性土の非線形挙動がよく表現できている．しかし，地表では計算値の位相が進んでおり，埋土の剛性が高く評価されている．すなわち，等価線形解析と同様，全応力法の短所が現れたものといえる．

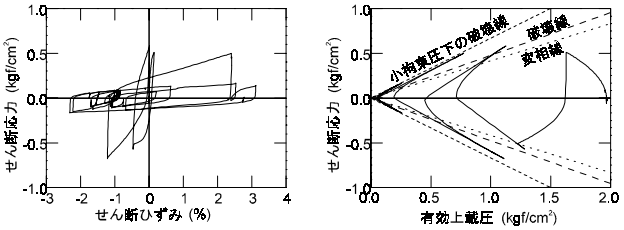


図-5.16　応力経路と応力－ひずみ関係

有効応力解析でも GL-16.4m の位置の位相はほぼ一致しているので，粘性土のモデル化は成功しているように考えられる．地表の位相は，全応力解析より改善されているが，これは過剰間隙水圧の発生を考慮したためにせん断波の伝播速度が遅くなったためで，有効応力解析の優位さが現れた結果となっている．しかし，観測値と比べると位相はまだ進んでおり，剛性を大きめに評価している．この理由として，計算で考慮しなかった EW 方向の加振に伴う間隙水圧の発生などが考えられる．

次に，GL-16.4m 記録の時刻7秒強と8秒強の挙動を見ると，観測値では急激な加速度の変化が見られるのに対し，等価線形では7秒の挙動はほとんど再現されず，8秒の記録は振幅が非常に小さい．全応力非線形解析では少しの改善が見られるのみである．これに対し有効応力解析ではこの部分はよく再現されている．

最後に，6秒以降の地表の波形を見ると，液状化の発生を示唆するような加速度の全体的な低下と急激な加速度の増加現象が見られる．後者はサイクリックモビリティにより発生したものである．サイクリックモビリティを考慮した YUSAYUSA ではこの間の経緯の多くをうまく説明しているようである．ただ，YUSAYUSA の加速度値は観測値よりかなり小さめであるが，これはすでに指摘しているように YUSAYUSA では応力経路が変相線を横切って以降は急激に有効応力が低下する傾向があり，これが結果に反映したものである．YUSAYUSA では振幅は小さいものの位相特性はよく一致している．

最後に，スペクトル特性について検討する．図-5.17は GL-32.4m と地表の加速度応答のスペクトル比を，図-5.18は地表の応答より求めた応答スペクトルである．両図とも，等価線形法の結果は他の応答と比べると大きく離れており，これまでに示した最大応答および時刻歴応答の

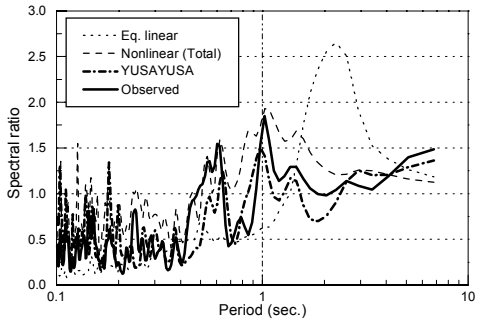


図-5.17　地表と GL-32.4m のスペクトル比

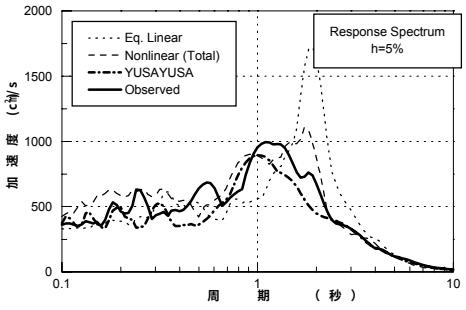


図-5.18　応答スペクトル

結果と合わせ，液状化の起こるようなケースに対する等価線形法の適用限界を表している．特に，スペクトル比では等価線形法はピークの数の少ないなめらかな曲線形状であるのに対し，観測値も逐次積分型の非線形解析もかなりピークの数が多くなっている．図-5.17では，等価線形を除く解析は，識別が可能な周期0.4秒より周期の長い部分ではピークの位置はほぼ観測値と一致している．しかし，ピーク値には若干の差があり，時刻歴応答でも観測値との一致度が一番よかった YUSAYUSA がもっともよく一致している．

図-5.18では，二つの全応力解析は2秒付近に大きなピークを有するが，観測値と YUSAYUSA では大きなピークは見られない．時刻歴応答の結果と重ね合わせてみると，ポートアイランドでは地震入力後非常に早い時期に液状化が発生し，地盤特性が大きく変化したものと考えられる．従って，この時期における材料特性の変化を考慮していない全応力解析で観測値との一致が悪くなっている．観測値では周期1秒程度に大きなピークがあるが，等価線形を除く解析は周期がやや短めであるが，加速度の大きさはよく観測値と一致した結果を与えている．これより周期が短くなると，どの解析でも500cm/s²程度の応答を示し，優劣は付けにくい．

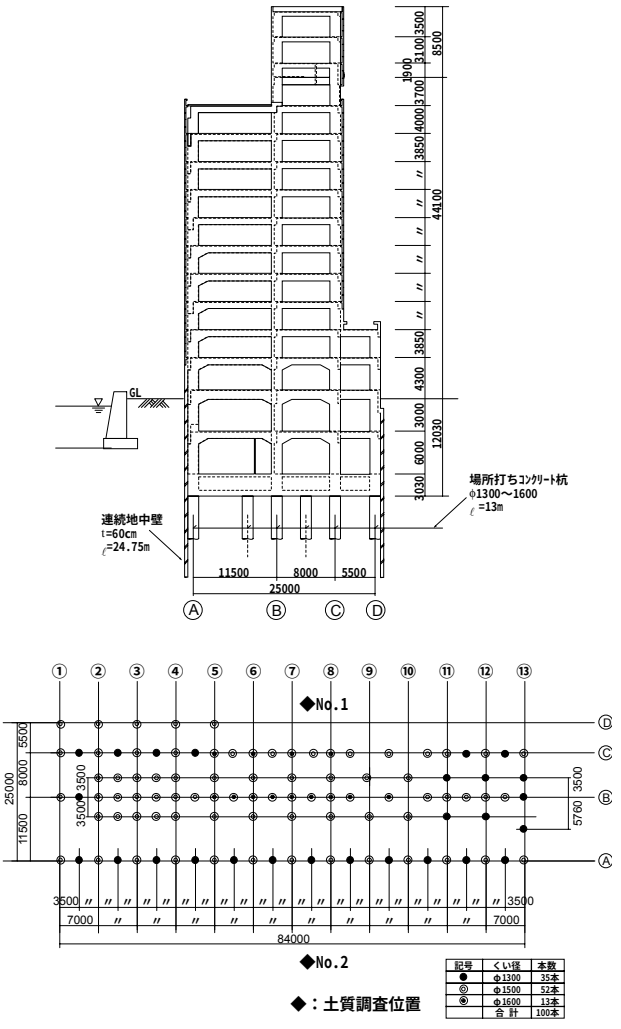


図-5.19　建物断面図と杭伏図

5.3　杭と地中連続壁を持つ構造物の解析例

兵庫県南部地震で被害を受けた建物を解析する[91]．対象建物はメリケン波止場東側護岸近傍に位置し，建物周囲が連続地中壁で囲まれ，場所打ち杭で支持された地上11階・地下2階の SRC 造構造物である．図-5.19に建物の断面図と杭伏図を示す．

図-5.20に柱状図を示す．調査位置は，旧河川の三角州性低地に相当する海岸線付近である．また，不撹乱試料を採取し室内試験を行って求めた．試験結果を図-5.21に示す．

(1) 解析モデルと解析方法

建物は図-5.22に示すように，地上部・地下部ともに等価せん断型質点系にモデル化する．地下階の等価せん断

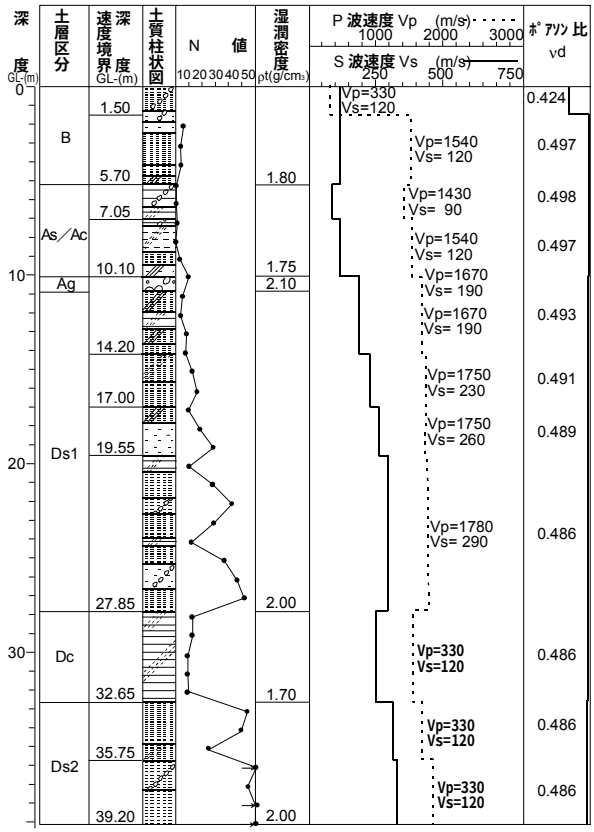


図-5.20　柱状図

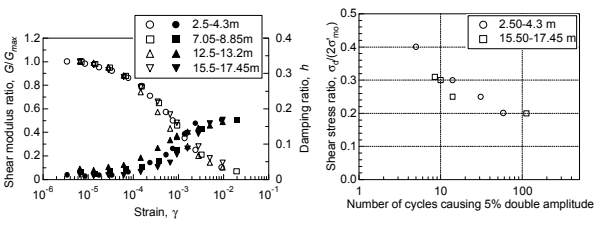


図-5.21　動的変形特性と液状化強度

ばねは，左右の地下壁に分配する．1階および B1階の質点と地下階のはり要素の間は剛なはり要素で連結する．各通りごとに1本のはり要素でモデル化する．面外方向の連続地中壁は，はり要素でモデル化する．さらに，面内方向の連続地中壁は平面要素でモデル化し，面外方向の連続地中壁および基礎梁の3辺と結合させる．地盤は表-5.1の様にモデル化する．

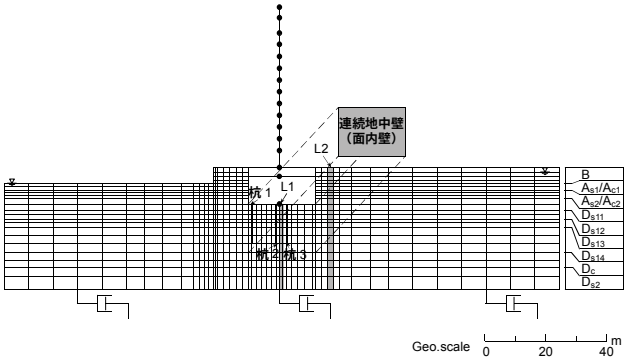


図-5.22　解析モデル

表-5.1　地盤の解析定数

地層区分	層番号	深度 (m)	γ_t (tf/m^3)	V_s (m/s)	E (tf/m^2)	ν
B	1	-1.5	1.8	120	4320	0.33
	2	-3			6755	
	3	-4.1			7746	
	4	-5.2			8495	
A_{S1}/A_{C1}	5	-6.3	1.75	120	6405	0.33
	6	-7.4			7275	
A_{S2}/A_{C2}	7	-8.3	1.75	120	6285	0.33
	8	-9.2			6840	
	9	-10.1			7395	
D_{S11}	10	-12	2.0	190	18627	0.33
	11	-14.2			20398	
D_{Ss12}	12	-15.5	2.0	230	27982	0.33
	13	-17			29339	
D_{S13}	14	-18.1	2.0	260	35904	0.33
	15	-19.6			37268	
D_{S14}	16	-22.3	2.0	290	42737	0.33
	17	-25			45506	
	18	-28			48256	
D_C	19	-30.3	1.7	250	28001	0.33
	20	-32.7			29643	
D_{S2}	21	-35.8	2.0	310	52169	0.33
D_{S2}	22	-40	2.0	320	55589	0.33

γ_t：単位体積重量，V_s：せん断波速度，
E：ヤング係数，ν：ポアソン比

解析は，全応力等価線形解析[92]と有効応力解析[41]の2種類行った．等価線形解析では，図-5.21および文献93の動的変形試験を用いた．有効応力解析では，GL～GL-19.6mで過剰間隙水圧の発生を考慮し，図-5.21に基づきモデルパラメータを決定した．入力地震動は，ポートアイランド地震観測記録の分析から推定された GL-83m における入射波[94]を用いた．

(2) 解析結果

自由地盤の過剰間隙水圧比と最大せん断ひずみ分布を図-5.23に示す．過剰間隙水圧の発生を考慮した層では過剰間隙水圧比が1.0近くになり，最大せん断ひずみも有効応力解析で約8%，全応力解析で約5%となり，液状化したと考えられる．

連続地中壁で囲まれた建物直下（L1）の地盤と建物から約4m 離れた建物近傍（L2）の地盤の最大ひずみ分布を図-5.24に示す．連続地中壁で囲まれた地盤のせん断ひずみは，同じ深さに位置する建物近傍の地盤に比べて，杭頭近傍で特に小さくなる傾向がある．

GL-13m 付近の地盤の過剰間隙水圧比の波形を，自由地盤と建物直下の地盤について図-5.25に示す．ここで，過剰間隙水圧は，地震前の間隙水圧からの変動分を意味しており，建物のロッキング振動などに伴う全応力の変化分も含まれており，理論的な意味での過剰間隙水圧とは異なっている．建物直下の地盤の間隙水圧は自由地盤と

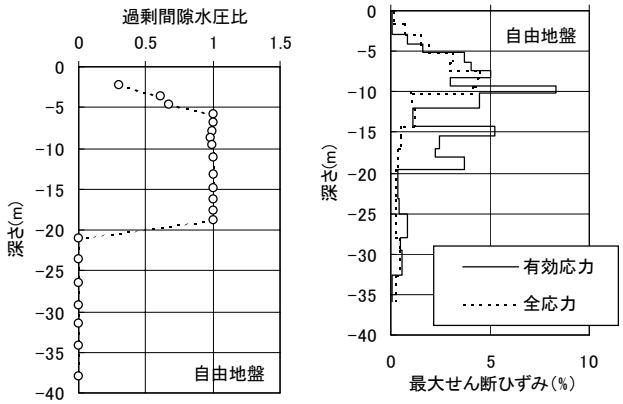
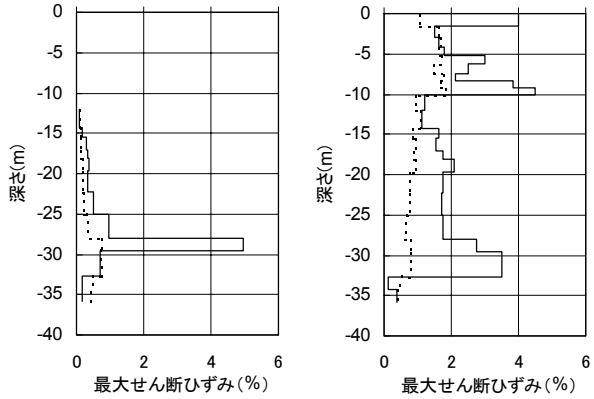


図-5.23　自由地盤の過剰間隙水圧比と最大せん断ひずみ分布



L1通り　　L2通り

図-5.24　連壁部の最大ひずみ分布

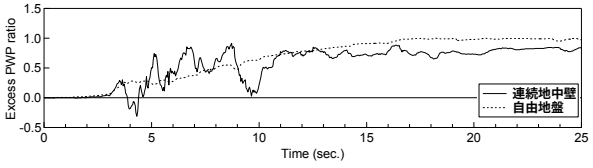


図-5.25　過剰間隙水圧時刻歴

同様に上昇しているので液状化が発生したと考えられる．また，連続地中壁の先端を支持する地盤（Dc 層:GL-28m）のせん断ひずみはその上層の地盤に比べて大きくなる．これは，連続地中壁の慣性力が先端地盤に作用することによって生じることが原因と思われる．さらに，有効応力解析では，過剰間隙水圧の発生を考慮した層の大部分のが液状化した結果約5%のせん断ひずみが発生しており，全応力解析に比べてせん断ひずみの値は大きい．

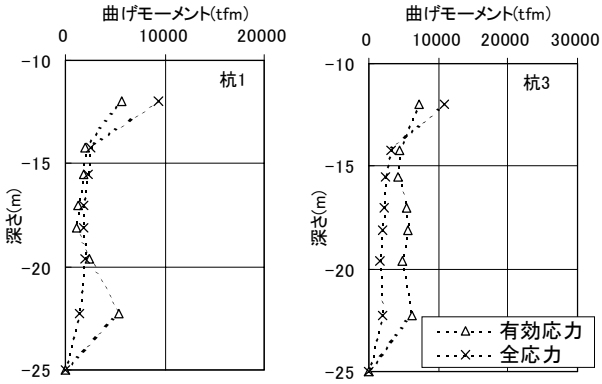


図-5.26　杭のモーメント図

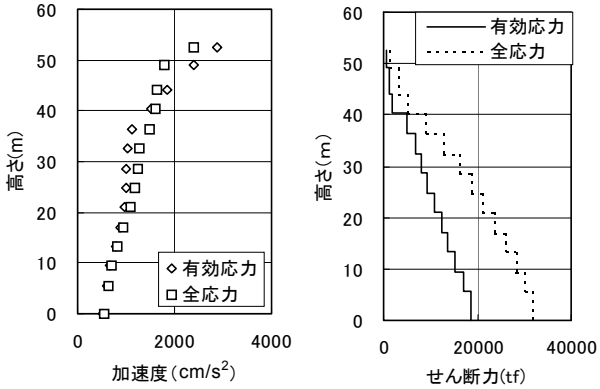


図-5.27　建物の加速度とせん断応力分布

杭1と杭3の最大曲げモーメント分布を図-5.26に示す．表層近くでは全応力解析が大きい値を与えているのに対し，深いところでは有効応力解析が大きい値を示している．

上部建物の最大加速度分布と最大せん断力分布を図-5.27に示す．有効応力解析では最大加速度は全応力解析より大きい．しかし，せん断応力分布では有効応力解析の方が小さい．これは，地盤の液状化のため構造物への有効入力が減った為と考えられる．

(3) まとめ

①連続地中壁はその内部の地盤のせん断変形を拘束し，地盤の剛性低下や過剰間隙水圧の上昇を抑えることにより，地盤の液状化や杭に作用する過大な曲げモーメントの発生を抑える．

②連続地中壁が基礎に作用する水平力の一部を負担するため，杭に作用するせん断力，曲げモーメントが小さくなる．ただし，連続地中壁支持地盤でせん断ひずみが急増する傾向があるため，この地盤より深く杭が根入れされる場合には杭応力の検討が必要である．

5.4　まとめ

この章では，地震応答解析の事例を集めた．単に地震応答解析を行ったら現象を説明できたという例ではなく，いくつかの手法を比較することにより，解析法の特徴が分かる例題を選んだつもりである．

これらの事例から，次のようなことが分かる．

①等価線形解析，全応力非線形解析，有効応力解析と，解析のレベルが上がるに従って，解析の精度は向上する．

②等価線形解析は，ユーザーによる誤差が少ない[7]．等価線形法より理論的には厳密なはずの非線形解析では，モデルの選定法などにより，精度は悪くなることもある．すなわち，より工学的な判断が要求される．

③一般に等価線形解析は最大加速度を大きめに評価する傾向があるので，最大加速度を基に建物の設計をするのであれば安全側といえる．しかし，周波数成分で見ると常に安全側とも言えない．

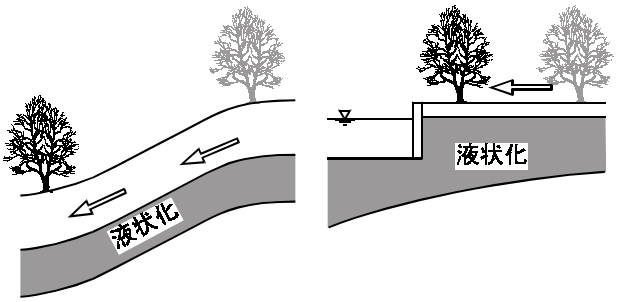
6 液状化に伴う流動

これまでは，地震時の動的な挙動を追跡するための地震応答解析を示した．液状化に伴い被害の発生するもう一つの要因は，液状化に伴う流動と言われている現象である．この現象は，地震中および地震後に起こり，地盤が大きく水平に動く現象で，場合によっては変位が10mのオーダーにもなる．ページ数の都合もあり，ここでは，詳細には述べない．メカニズムや解析法については，文献95に詳細にまとめたので，これを参考にされたい．

液状化に伴う流動は，図-6.1に示す二つのケース，すなわち地表や液状化層が傾斜しているケースと，側方に護岸などの解放面があるときに生じる．1995年兵庫県南部地震では，二つの人工島を始め，周辺の埋立地で後者の被害が多発した．護岸構造物の移動に伴い，海岸から200m 程度内側の地盤までが海側に変位し，杭などにも多くの被害が発生している．

[7] 文献2で示したブラインドテストでは，等価線形法でも結果に相当のばらつきがあった．しかし，この事例では，近傍の硬質地盤で観測された記録を基に対象サイトの地震動を予測するもので，基盤の判断など，いくつかの判断を要求された．ここでは，柱状図と地盤物性，入力地震動が与えられる様な，もっと単純なケースを指している．

この様な流動は，地盤が流体ないしはほとんど剛性がない状態で変形するものである．これを，固体と捉える考えと，液体として捉える考えがあり，まだ決着は付いていない．しかし，実務的に予測することを考えるのであれば，地盤の変形を予測する際には，固体と考えた方が便利である．ただし，杭などの地中構造物の被害を予測する際には，固体と液体とで計算方法が異なり，メカニズムの決着を付ける必要がある．兵庫県南部地震後改訂される（予定も含め）設計指針でも，両方の考えに基づいている．



(a) 液状化層上面が傾斜　　(b) 側方開放面

図-6.1　**側方流動の発生する地盤条件**[96)]

7 有効応力解析の実用性と限界

はじめにでも述べたように，筆者は有効応力地震応答解析は非常に有力な武器であると思っている．しかし，その使い方は非常に難しく，多くの知識と経験，さらに適切は判断力が必要であるとも思っている．プログラムがあれば計算できるというわけでには行かない．

これまでに，基本的な理論から構成則の考え方，さらには実例を通して結果の見方などを示したつもりである．しかし，これだけでも十分な知識とは考えられない．この章では，幾つかの項目について，解析を行う際の注意事項，解析の限界などについて議論をする．なお，各節にはかなり過激な題目が付いているが，これは，内容を強調するものである．文中には対策や考え方も示してある．題目を見て，恐ろしいと思われる方は，内容を理解していただき，自分の解析に反映していただければ幸いである．

挙動を理解するために論文を読むことも重要である．しかし，論文を読むときには注意も必要である．これは，最初にも述べたが，論文では，極端な言い方をすれば，まず解析が実験や実被害を説明できたという結論があり，これを実証するために計算をしていることが多いからである．合わなかったものは論文に書かれる事はないし，全てが説明できなければ，説明できないところは目をつぶり，合うところを見つけて，だから合っているという結果が導かれる事もある．筆者の経験でも次のような事例がある．

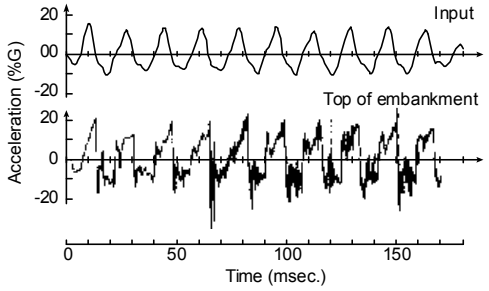
ある発表で，内容におかしいところがあるので質問したところ，そのことは認めた．しかし，同じ著者の次の発表では，前の手法で現象がよく説明できたと引用してあり，その手法が正しいとして研究を進めている．

地震応答解析で，最大加速度が実験の1/4程度であったが，よく説明できているとの結論があったのでおかしいと質問したら，動的な現象では周波数特性が重要で，これが説明できているとの返事があった．

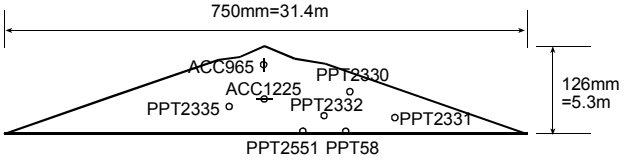
ある発表で，理解出来ない現象があったので，説明を求めたところ，①プログラムは間違っていない．②液状化は複雑な現象である．との返事が返ってきた．もう少し背景を説明すると，次のようである．

図-7.1に地盤工学会で行った一斉解析[4)]結果の一つを示す．ここでは，(b)に示した非常に単純なモデルで，(a)の上の様に高周波成分を落とした非常になめらかな入力を与えている．(a)の下は応答例である．加速度にノイズが多いことは，7.4節でも述べるが余り大きな問題ではない．私が興味を引かれたのは加速度が急変している部分があること，左右に揺れで挙動が異なることである．この現象が現れたのは，一斉解析の際にはこのモデル一つであった．先の話題に戻って，彼の発表は同じ問題を解いて，まさにこれと同じ現象を示していたのである．一つだけなら，たまたまということもある．しかし，二つのプログラムが同じ結果を出すとすれば，何か意味があるに違いない．それが私の質問の意図で，この現象を説明してくれと言った．発表者は高名な研究者であるが，その回答が先のようなものである．

このような話は，これだけではなく，筆者はかなり頻繁に体験している．考えてみると，実験を主としている研究者は，実験を行えば必ず（オリジナルか否かは別として）成果がある．しかし，プログラムを作って計算し



(a)入力波形（上）と地表の加速度時刻歴（下）



(b)モデル

図-7.1　議論になった現象と同じ現象

ている研究者にとっては，プログラムが間違っているとか現象を説明できないと言うことは致命傷で，何も残らない．この辺が，解析の論文では合ったという結論しか無い理由のように感じられる．したがって，論文を読む際にも，かなりの知識が必要で，著者らがどのような判断をして，何に価値を見いだしており，記述されていない所は何かというような点を読みとることが重要である．

7.1 液状化の発生しない構成則

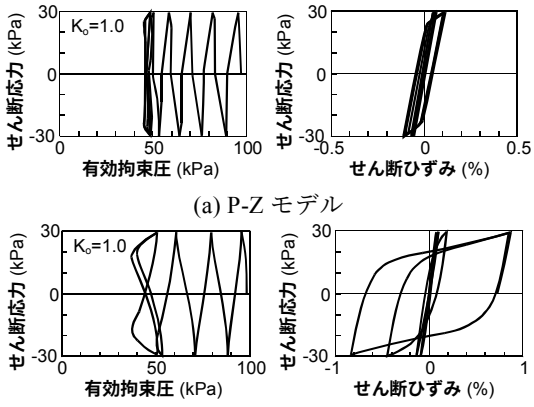
複雑な地盤の解析が行えるためには，液状化試験のような単純で基本的な試験のシミュレーションはきちんと出来て当然であろう．しかし，多くの構成則は，この試験のシミュレーションも出来ず，液状化も発生しない．

例えば図-7.2はこれまでにも度々現れた一斉解析[4]（以後単に一斉解析と呼ぶ）における液状化試験のシミュレーションの結果である．繰返しに伴う有効応力の減少は表現できているし，サイクリックモビリティ現象も傾向として再現されている．しかし，どちらも，有効拘束圧が初期値の半分程度になった所で応力経路は定常化し，ひずみも1%未満で定常化している．液状化の判定基準が過剰間隙水圧が初期有効拘束圧の95%になったときや，両ひずみ5%（この例に直すと片振幅3.75%）であることを考えると，これらの構成則では液状化が起こらないことになる．この様な事は，この一斉解析，およびその後行われた一斉解析[5]（以後，二度目の一斉解析と呼ぶ）でも，弾塑性論に基づく構成則で共通に見られる現象であった．ちなみに，筆者らのモデル[39]でも同じ欠点があった．

二度目の一斉解析では，それでも改良のあったモデルもあった．図-7.3はその際の結果であるが，確かに両モデルとも改良の後が見える．しかし，例えば，図-7.4に例を示した液状化強度試験時の挙動と比べてみると，応力経路，応力－ひずみ関係ともかなり形状が異なっていることが分かる．この様な形状の違いが地震応答に及ぼす影響が分かっているわけではないので，これを持って精度が悪いと結論することは早急であるが，感覚的には合ったとは言いにくい状況である．なお，両モデルでも，二つのモデルは同じ名前で呼ばれている．先にも述べたように，構成則は，名前が同じでも実質がどんどん変わる実例である．

この一斉解析では図-7.4に示した液状化強度の繰返し数5回と20回の強度をシミュレーションするように条件が設定された．不思議なことに，要素試験で液状化が発生しないはずの構成則でも，図に結果が示されている．ここでも工学的な判断が必要である．つまり，これらの構成則では実験とは異なる液状化の基準を設けたわけである．筆者は，液状化の発生予測を目的とした有効応力解析を行うのであれば，これでも良いのではないかと考えている．しかし，変形予測をするのであれば，問題があるように考えるのは，筆者だけでは無いであろう．

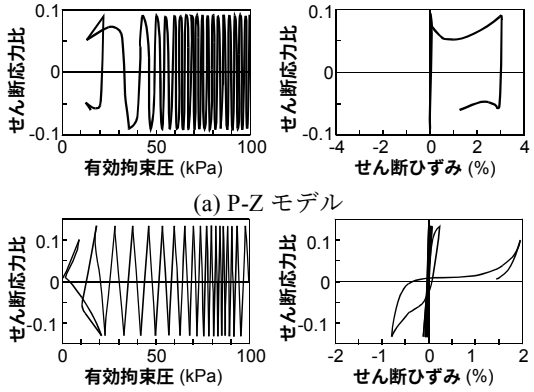
この一斉解析の際の加速度時刻歴は図-1.2に示されて



(a) P-Z モデル

(b) 西モデル

図-7.2 液状化しない構成則の例



(a) P-Z モデル

(b) 西モデル

図-7.3 改良された構成則

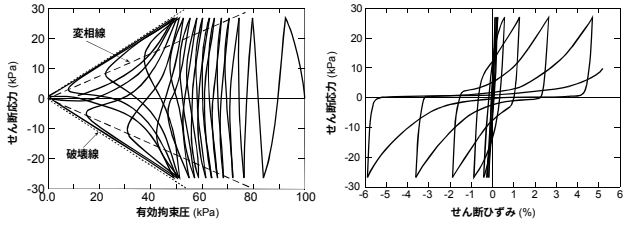


図-7.4 液状化試験の結果の例

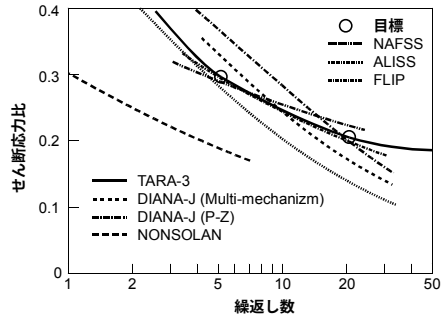


図-7.5 液状化強度曲線のシミュレーション

おり，かなりばらついていることは既に指摘した．図-7.6は過剰間隙水圧時刻歴である．ここで興味深いのは，最初に液状化したと推定される，GL-3.5～5mで，どのプログラムでも過剰間隙水圧はほぼ有効拘束圧に達している様に見える．これは要素試験の結果と比べておかしい様にも見える．

実験のシミュレーションは非排水条件で行っているが，解析では間隙水圧の浸透を考えるとすれば，この現象は特におかしな現象とは言えない．最近の液状化解析に関する論文を見ていると，ページ数の制約もあるのであろうか，図-7.2の様な要素試験の結果が示されていることは少なく（出しているとすれば自信があるからであろう），図-7.5の様な液状化強度のシミュレーション結果がパラメータ設定の妥当性を示すために示され，さらに，図-7.6の様な過剰間隙水圧の時刻歴を示すことが多い．これを見て，元の構成則が，要素試験で液状化も起こらないものである事を読みとる事は，普通の技術者では困難であろう．

関連して，幾つかの話題を示す．図-7.5では，目標として示された二つの点を通っていない構成則も多い．筆者は，これも解決できることだと思っている．同じパラメータで小さい地震でも大きい地震でも使おうと思うと問題があることは事実である．しかし，地震時応じて有効な繰返し数があるので，この辺をターゲットにしてパラメータを決定すれば，実用的には良い発生予測が出来ると考えられる．つまり，本来は土特有の性質である液状化強度のパラメータに地震動の大きさの要因も持ち込めば良いのである．これも工学的な判断である．

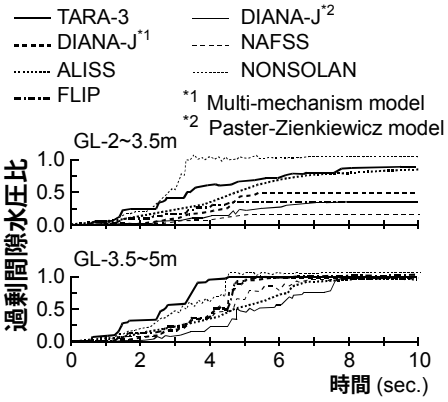


図-7.6　過剰間隙水圧時刻歴

その他の構成則を見ても，要素試験レベルで，変位と過剰間隙水圧の両方の基準で液状化を同時に満たすことは困難なようである．例えば，図-7.7に示したモデル[5]では有効拘束圧はほとんど0になっているが，ひずみは大きくならない．ひずみを大きくするためには，単に拘束圧が小さくなるだけではなく，さらに履歴による剛性の低下を考慮する必要がある．構成則に付いては，2章で示したが，降伏条件，塑性ポテンシャル，硬化パラメータが一定と言った単純な（しかし理論的に美しい）モデルでは，ひずみを大きくすることは困難なようで，履歴の影響を考慮して硬化パラメータを変え，塑性剛性や弾性剛性を履歴の関数として劣化させるようなモデルに移行しつつある．このため，構成則はどんどん複雑になって行く様である．

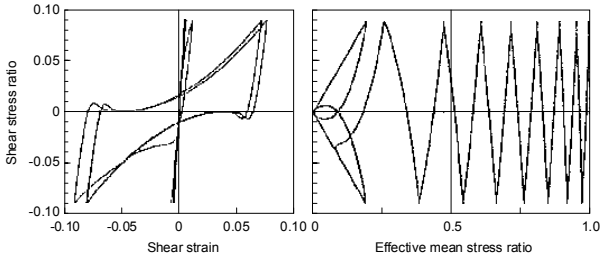


図-7.7　有効拘束圧は0になる構成則

拘束圧だけでは上手く行かない例をもう一つ紹介する．図-7.8は，液状化試験を行い，液状化後も載荷を続け，その後単調載荷を行い液状化後の応力－ひずみ試験をした結果とそのシミュレーションである[97]（ひずみが大きいのに注意）．図でstaticとして示したのは，単調載荷のみの結果であり，解析は良く実験と対応している．しかし，液状化後の応力－ひずみ関係は初期有効拘束圧をほとんど0（0.005kgf/cm^2）とシミュレーションできない．しかし，履歴の効果を考慮して剛性を落とせば，図に示されるように合わせることが出来るようになる．

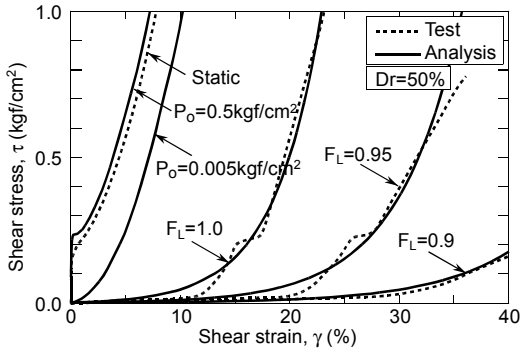


図-7.8　拘束圧が0になっただけでは液状化に伴う挙動が説明できない例

7.2　プログラムを作る人によって結果が異なる

前にも述べたが，筆者は，色々な構成則のコーディングを行ってきた．この際，その発表論文だけでコーディングが出来たことは少なく，分からない所は著者に確認するなどしてきている．論文というのは，本来，第3者が同じ結果が出せるように書くのが筋であるが，それでも

この様な状況である．基本的な部分は書いてあるが，コーディングをするための微妙なところやクリティカルな所は書いていない事も多い．

図-7.9の下段は，一斉解析の際の要素試験のシミュレーション結果である．これに対して，上段は，筆者が現在関わっているプロジェクトで，同じ理論[24]に基づいて作ったプログラムで，原論文と同じ条件で解析した結果である．両者は非常に良く似ているが，同じだと言われると抵抗があるところである．論文に書いていない所の判断の分かれ目が差をもたらしたのかもしれない．また，上段のプログラムは出来たところなのでまだバグがあるかもしれない．しかし，下段の（つまり著者による）プログラムの方が間違っている可能性の否定できないし，論文が書かれてから，改良が行われたのかもしれない．

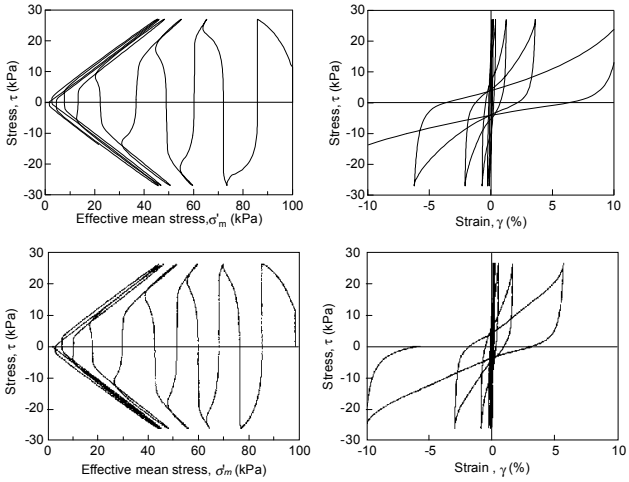


図-7.9　同じ理論を基に作ったコードの挙動の差

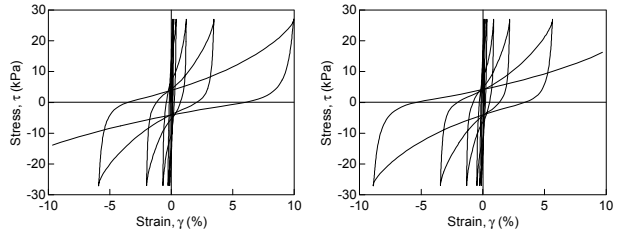


図-7.10　ばねの数の違い（図-7.9は10，左は8，右は4）

筆者は，実務と言うことを考えれば，こんな詮索は意味がないと考えている．両者の一致度から見て，本質的に構成則のエッセンスは捉えられている．すると，同じパラメータを使うと結果は異なるかもしれないが，同じ挙動をするようにパラメータの値を調整すれば，特に問題が無く，プログラムを実行することが出来るはずである．

関連して，同じモデルに関する別の話題を紹介する．このモデルは図-2.9に示すマルチスプリングモデルであるが，このばねの数を変えて見たのが図-7.10である．当然であるが，ばねの数によって応答が異なる．所で，論文のどこを見ても，ばねの数は書いていない．

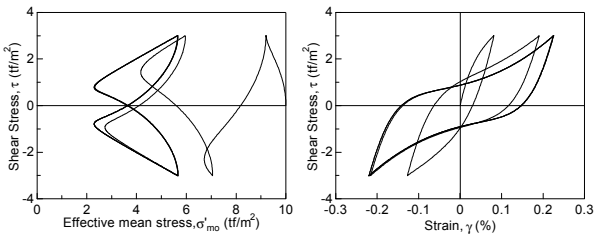
7.3　精度は確保されているか

地震応答解析では，まず数値積分を行いひずみ（増分）を計算し，これを非線形の応力－ひずみ関係のサブルーチンに入力し応力（増分）を求めることになる．ここで，一次元モデルのように応力がひずみの関数で与えられていれば，ひずみ増分の値に関わらず，応力を正確に計算することが出来る．ところが，多次元の構成則では，応力－ひずみ関係は増分式で与えられているため，ひずみ増分の値が異なると，応力増分が異なることになる．

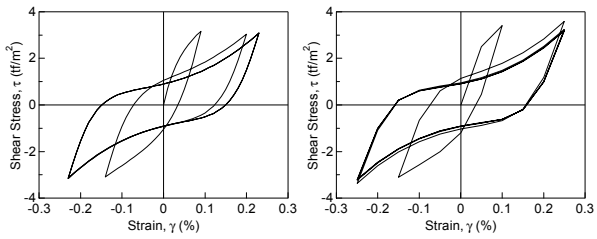
図-7.11は，筆者らの構成則[30]で要素試験のシミュレーションを行った事例である．ここでは，ひずみ増分を0.001%，0.01%，0.05%の3通りに変えて計算している．応力－ひずみ関係を見れば，ひずみ増分の値によってひずみが違うのが分かる．

一方，図-7.12は5.3節で示したポートアイランドの解析の，有効応力解析における，埋土層，粘土層の各層におけるせん断ひずみ時刻歴から，各時間におけるひずみ増分を計算したものである．時間増分の値は最大で0.15%程度であり，図-7.11に示した例題より大きい．

おそらく，地震応答解析で構成則を扱うサブルーチンでは，与えられたひずみ増分に対して，接線剛性を掛け応力増分を求めていることが多いのではないだろうか．すると，各ステップで応力計算の誤差が異なることになる．5.3節で用いたのは応力－ひずみ関係が数式（双曲線モデル）で与えられているので，ひずみ増分の値に関わらず，応力は正しい．しかし，図-7.11から判断すると，図-7.12の様なひずみ増分時刻歴を与えたとき，最大ひず



(a) $\Delta\gamma$=0.001%



(b) $\Delta\gamma$=0.01%　　(c) $\Delta\gamma$=0.05%

図-7.11　ひずみ増分の影響

みは20%程度は誤差を含んでいる可能性があることになる．これを避けようとすれば，構成則サブルーチンで，最小のひずみ増分を決めておき，これより大きいひずみ増分が与えられたときにはひずみを細分化するなどの処置が必要である．所で，この様な所は，プログラムマニュアルなどに書かれることはまず無いであろう．とすれば，20%程度のひずみ（従って変位）の違いに気が付くことは無いであろう．

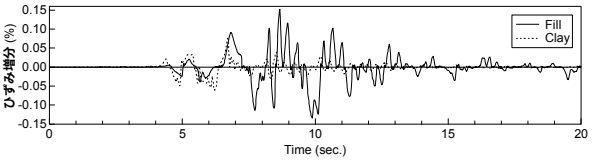


図-7.12　5.3節の解析のひずみ増分

7.4　最大加速度は信用できない

図-7.13は文献98に示される，東京のあるサイトを例として，地震応答解析を行った結果得られた最大応答値を示している．入力に用いた地震動は，想定断層に対して作られた模擬地震動で，Δt=0.04秒間隔でデータが与えられている．

ここでは，3つの解析方法で計算を行った．すなわち，ケース1：Newmark のβ法でΔt=0.04秒，ケース2：Newmark のβ法でΔt=0.004秒，ケース3：中央差分法でΔt=0.002秒である．ここで，ケース2とケース3とは，よく見ると若干の差は見られるが，ほとんど一致しており，数値解析の観点から正解と考えることが出来る．これに対して，ケース1では，変位，応力，ひずみについてはケース2と区別が付かないくらい一致しているが，最大加速度のみかなりの差が見られる．全ての深さでケース1の方が大きく，特に GL-4.8m と GL-17.5m では非常に大きくなっている．

この2つの深さの加速度時刻歴で最大値の発生する付近を拡大したのが図-7.14である．ここで点線で示したのが，数値積分の時間間隔を短くした（Δt=0.004秒）解析（以下細増分と呼ぶ）で，細い実線が元の時間間隔（Δt=0.04秒）の解析（以下標準増分と呼ぶ）である．まず，上段の GL-4.8m の記録を見る．本質的に二つのグラフは同じであるが，細い実線の方は少し波形が乱れている．そして，標準増分の最大値は32.92秒の地点で発生しているが，その値はこの様な乱れ（ノイズ）の頂点である．ここでは細増分の値は1.42m/s^{2}と小さい．

この原因を調べるために，GL-4.8m を挟む二つの層の応力－ひずみ関係を書いたのが，図-7.15である．図に入れた32.92秒の位置は，丁度ノイズにより最大加速度となった時点で，いずれもこの時刻で丁度除荷が起こっている．すなわち，このノイズは除荷に関連したものである

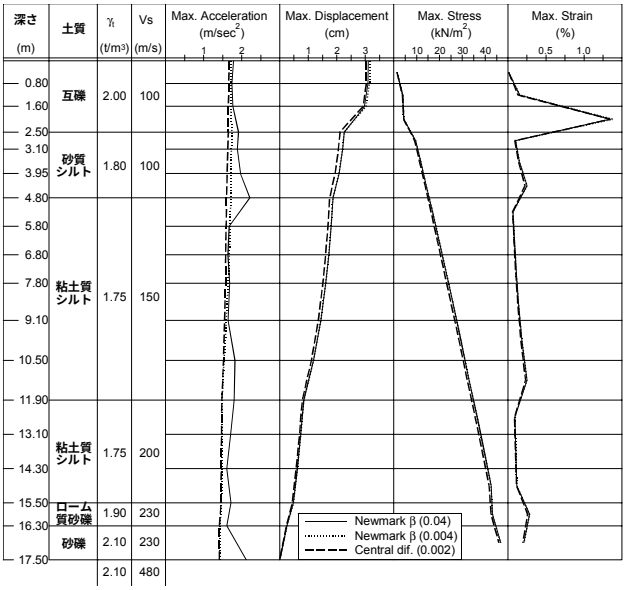


図-7.13　最大加速度分布

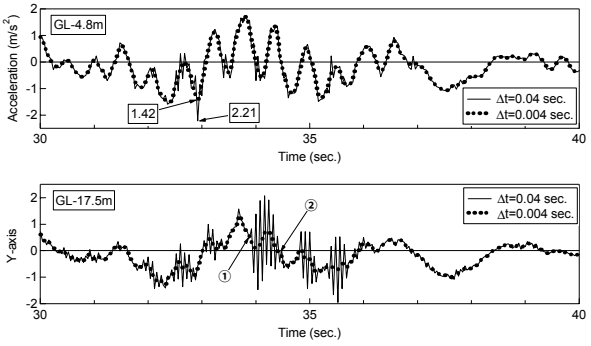


図-7.14　加速度時刻歴（30～40秒を拡大）

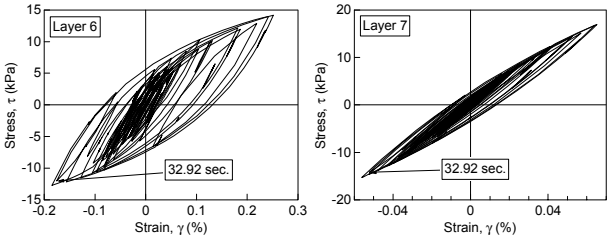


図-7.15　応力－ひずみ関係（標準増分）

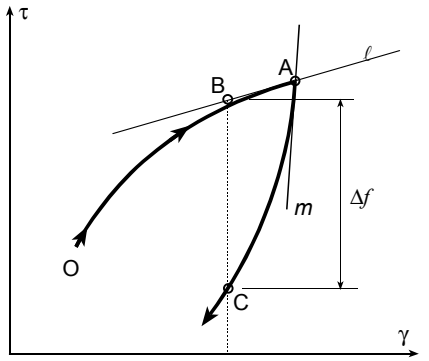


図-7.16　除荷点付近の不釣り合い力の模式図

と推測される．

図-7.16は応力－ひずみ関係の除荷点付近の挙動を模式的に示したものである．今，O→A と状態点が動いてきたとする．A 点の次の増分計算を行うことにする．Newmark のβ法では接線剛性が要求されるが，ここでは，ℓが接線である．数値積分を行うと，ひずみとして B 点の値が求まったとする．数値積分を解く間は線形の挙動を仮定したので，外的な応力状態は B 点になる．しかし，応力－ひずみ関係で見ると，除荷が起こっており，C 点が正しい点となる．B, C の状態点の応力の差Δfが不釣り合い力と言われるものである．この不釣り合い力は，通常の非線形解析では無視されてしまうケースも多々ある．しかし，有効応力解析ではこの不釣り合い力を無視することが出来ない．これについては，2.3(4)⑥で書いたが，有効応力解析では，図のℓはひずみに依存した接線剛性であり，真の接線剛性では無いからである．この不釣り合い力は，この増分計算でイタレーションを行って無くすか，次のステップに持ち越す事になる[8]．この計算では，後者，つまり次のステップに持ち越している．

この様な不釣り合い力を次のステップに持ち越すと，物理的には，衝撃を与えたことに相当する．すると，不釣り合い力を加えた節点の加速度が急激に大きくなる．しかし，例えば机の上をたたいたとすれば，たたいた点は数 g の加速度が発生しているが，全体としてそんな大きな加速度で動くわけではないことから分かるように，その影響はほとんど加速度にのみ現れ，変位や応力にはほとんど影響しない．このことは，図-7.13の最大加速度を除く最大値が細増分と標準増分で変わらないこと，図-7.15には，激しい加速度の変化に対応するような挙動が見えないことから理解できよう．また，この大きな加速度は自由振動により急速に減衰していく．このことは，図-7.14を見れば理解できよう．

これから分かるように，数値計算の都合によって生じた加速度のノイズは，加速度のみに現れ，全体の挙動にはほとんど影響を与えない．しかし，最大加速度のみを見て，どの加速度値がノイズにより大きくなっているかを知ることは出来ない．加速度時刻歴を書けば，その波形からある程度推定することが出来る．非線形の時刻歴応答解析を行うときには，出力された最大加速度をそのまま使うことは（設計的には安全かもしれないが）非常に精度が悪いことが多い．加速度時刻歴を書いて，不要なノイズを除く努力が必要かもしれない．

この様なノイズは，除荷したときの起こりやすい．もちろん不釣り合い力はどの計算ステップでも起こっているが，その値は通常小さく，ノイズとして明瞭に区別できるオーダーにはなりにくい．しかし，除荷時には，最初に仮定した剛性は接線剛性でかなり小さく，従って同じ外力増分に対してひずみが大きい．しかも，除荷剛性は非常に大きいので，このひずみに対応する応力変化も大きく，その結果として不釣り合い力が大きくなるわけである．

次に，基盤（GL-17.5m）を検討する．ここでも GL-4.8m と同様のノイズが見られるが，その値が大きいことが挙げられる．なお，この計算では0.04秒の数値積分時間を使っているので，図のノイズの山から次の谷の間が一つの数値積分である．つまり，数値積分の各ステップで山→谷→山と繰り返されているわけである．

この現象も，GL-4.8m の現象と同じである．ただし，大きく異なる所がある．それは，集中質量の大きさが異なることである．集中質量は上下の層の質量の半分として計算されるが，基盤ではこれより下の層は無いので，平均的に見ると他の地点に比べれば質量が半分となっている．このことは，同じ不釣り合い力を与えたとすれば，ノイズとして現れる加速度が非常に大きくなることを示している．

筆者の経験でも，ここで行った様な弾性基盤を用いる（入射波入力が出来る．逸散減衰が考慮できる）解析を行ったとき，基盤位置の最大加速度だけ，この例のように異常に大きくなることはかなり頻繁に体験している．その原因は，基盤の集中質量が他の位置に比べて小さいと言うことに起因していると考えられる．

この計算例では，さらに，基盤の上の砂礫層もかなりの非線形挙動をしている．この層の方が剛性が大きいので，除荷時の剛性も大きく，従って，除荷時に生じる不釣り合い力も大きくなる．これが，この層のノイズが大きい原因である．

ここで，注意しなければいけないのは，これはあくまでも数値計算の都合上起こったノイズであり，全体挙動にはほとんど影響を与えていないことである．例えば，図-7.14の下段で①と②の間は非常にノイズが大きい．こ

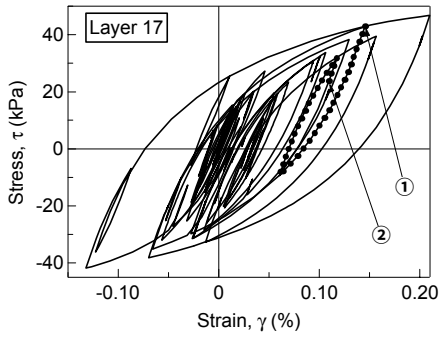


図-7.17　最下層の応力－ひずみ関係

[8] YUSAYUSA ではこの両方を行わず，代わりに，釣合式が満たされるように，加速度を変えている．

れに対応する時間の応力－ひずみ関係が図-7.17で太い点線で示されているが，このノイズに影響を受けている様子は全く見られない．また，最大応答値を見ても，加速度を除けば，細増分の結果と同じ結果となっている．

これまでに見たように，有効応力解析では，加速度の扱いはかなり慎重に行う必要がある．プログラムによっては，除荷が起こったときには，前のステップに戻ってその増分だけ数値積分の時間間隔を小さくしてこの様なノイズを避けようとしているプログラムもある[16)21)]．しかし，この様な処理はプログラムが複雑になるのみならず，多次元解析ではどこかの要素で必ず除荷が起こるようになるため，計算量が膨大になる可能性もあり，多くのプログラムでは採用されていないようである．

解決策の一つは，数値積分の時間増分を小さくすることである．数値増分の時間増分として，地震動の増分がそのまま使われることが多い．また，場合によっては，もっと荒い増分が用いられることも多い．確かに，例えば建築物を対象とするのであれば，10～20Hz 以上の周波数成分の応答に意味のあることは少ないから，荒い時間間隔を使う物理的な意味はある．しかし，数値計算上の問題から積分時間が決まってくる事もある．

イタレーション系の解法を用いているときには，この様なノイズは出にくい．しかし，この場合でも出ないとは限らない．それは，収束判定の手法による．一般に収束判定には，イタレーションの途中の誤差のノルムの系に作用する外乱のノルムに対する比が用いられる．この場合，一つの節点の誤差が大きくても，全体の誤差としては小さく，収束と判定されることがある．

この様なノイズを消すためのテクニックというのも無いではない．それは，表に現れない減衰を利用する方法である．

一つの方法は，減衰マトリックスを変えるのことである．これまでの計算では，Rayleigh 減衰（4.6節参照）

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \tag{4.12}$$

でβ=0.005を用いていた．この減衰とモード減衰 h_i の関係は次式で表される．

$$h_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{b\omega_i}{2} \tag{4.13}$$

ここで，ω_i は i 次のモードの円振動数である．この層の平均 V_s は155.7m/sec.であるので，一次固有周期 T は概略

$$T = \frac{V_s}{4H} = \frac{2\pi}{\omega_i} = 2.24 \text{ 秒} \tag{7.1}$$

であるので，一次モードに対しては0.7%程度の減衰を見込んでいた．この減衰は，高次のモードに対して非常に大きく利く減衰であることは式(4.13)より明らかであろう．

これに対して，図-7.18は減衰をこの10倍にしたものと元の計算を比較している．GL-17.5m ではノイズがきれいに消えていることに着目されたい．しかし，減衰を大きくしたことで上部では応答が変わっていることが図-7.18の GL-4.8m の層の応答から分かる．なお，減衰の全体挙動に与える影響が小さいのに驚かれる方があるかもしれない．減衰が大きくても応力の伝播はることがこの原因と考えられる．

しかし，この逆もある．図-7.19はβ=0.0005（一次モードで0.07%）の結果であるが，元の波形がどこに行ったと思うぐらい大きなノイズが入っている（縦軸の違いに注意）．

ここで見たように，Rayleigh 減衰を上手く使うことで，ユーザーの立場で（プログラムをいじれなくても）ノイズを無くすことは可能である．減衰を大きくすればするほど，高周波成分が消えるので，ノイズは発生しにくくなる．しかし，一方では数値計算に伴う誤差も大きくなる．図-7.18の上段に示した差が許容できるようであるなら，かなりの減衰を導入する事も可能であろう．しかし，常にこの程度と言うことも保証できるわけではないので，大きな減衰を使う際には，自分で確認しておく等の処置が必要であろう．

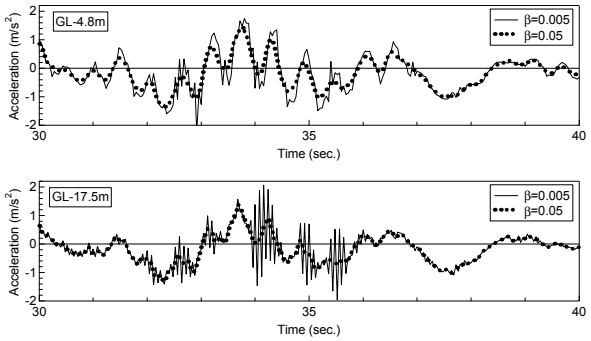


図-7.18　減衰を大きくしたときの応答

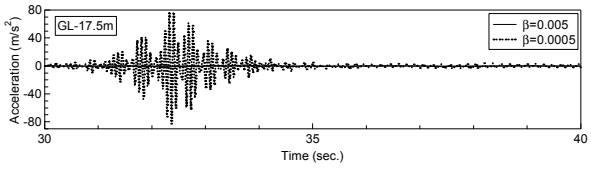


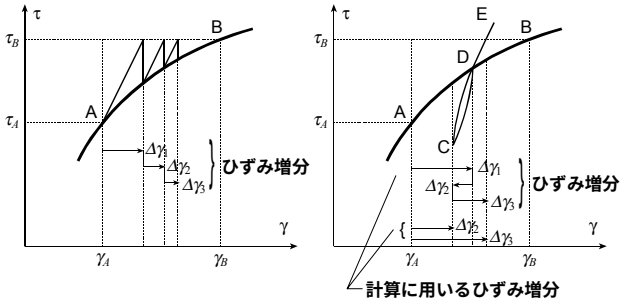
図-7.19　減衰を小さくしたときの応答

Rayleigh 減衰の様に減衰として目に見える形でなく減衰を起こす方法もある．例えば数値積分で Wilson のθ法はθ≥1.37で無条件安定となるが，通常用いられるθ=1.4でもかなりの減衰が入っている．また，Newmark のβ法でも極端なβの値を使えば高次の振動は押さえられる．

7.5　イタレーションの方法によって答えが変わる．

前節ではイタレーションを行わないことで生じるノイズの話をした．ここでは，イタレーションを行う際の問題について述べる．

図-7.20はイタレーションにより増分前のA点から増分語のB点に収束してくるイメージを表したものである．(a)は非線形解析の教科書に良く示されている図で，繰返しにより次第に解は収束してくる．



(a)　(b)

図-7.20　イタレーションによる収束の模式図

所で，実際の計算では，図-7.20(a)の様な一様な収束は，一自由度系では起こるが，多自由度系では通常起こらない．これは，隣接する要素間で不釣り合い力の大きさが異なる為である．例えば，ある要素で大きな不釣り合い力が発生したとすると，次のイタレーションでは隣接要素に大きな不釣り合い力が作用し，隣接要素の誤差が大きくなり，その次のステップでは元の要素の不釣り合い力が再び大きくなる様な現象が起きるからである．

各イタレーションの度に構成則を計算するサブルーチンに入力されるひずみ増分$\Delta\gamma_1$，$\Delta\gamma_2$，....は図-7.20(a)の場合には一方向で値は次第に小さくなってくるが，多自由度系では(b)の様に，向きが逆転したり，大きさが大きくなったりすることもあるわけである．

図-7.20(a)のケースであれば，構成則のサブルーチンを作る際に注意することはそれほど多くない．入力として与えられるひずみ増分に応じて応力（増分）を出力すれば良い．

しかし，(b)のケースではプログラムはもっと慎重に作る必要がある．(a)のケースと同じように作ると，$\Delta\gamma_2$は反対方向を向いているので除荷が発生し，D→C と挙動してしまう．そして，多次元の構成則では Masing 則の第二法則（2.3(1)項参照）を使っていない構成則も多いので，$\Delta\gamma_3$に対して，C→D→E と挙動し，本来の目的地 B とはかけ離れた所に行ってしまう．

これを防ぐには，図-7.20(b)の下に示したようにA点の状態を記憶し，常にA点からのひずみ増分として応力増分を計算する必要がある．すると，イタレーション途中とはいえ，増分が大きくなることがあり，7.3節の問題が生じるのでコーディングはさらに手間が掛かるようになる．

読者の中には，こんな事は当然と思われる方もいると考えられる．しかし，筆者には強烈な想い出があり，常識とは感じていない．それは，ある液状化プログラムの開発プロジェクトでの事である．筆者らはユーザーの立場で，ソースリストは公開されていなかった．しかし，解析結果から見て，図-7.20(b)の様な現象が起こっているのに，プログラムは(a)の現象しか考えていないと判断できた．そこで，その旨を意見として出し，プログラムを改良するように要請した．その時の返事は，(b)の様な現象は絶対起こっていないと言うものであった．その後，何度かのやりとりがあり，筆者の言い分を認め，プログラムは改良されることになったが，その時の回答は，先に(b)の現象は絶対に起こっていないと行ったことは忘れ，(b)を想定して作ると，時間と記憶領域が掛かるので，とりあえず(a)を基本にして作ったというものであった．一番最初に述べたように，プログラムというのは間違っていることを認めると，何も残らない．それが，開発側のこの様な頑固な答えとなって返ってきたものと考えられる．

この様に．プログラムの開発側がバグや考え違いを認めないのは，これ以外にも多く経験している．また，学会等の発表でも，プログラムに関する真剣な質疑は非常にしにくい状況にある．

7.6　一次元解析は間違っている

地盤は水平成層といえども，有効上載圧と側圧が異なる（静止土圧係数 K_o が1ではない）ので，初期せん断が加わっている．これについては，「地震応答解析に用いる地盤物性」で詳しく説明した．まとめてみると，次の二つである．

① 有効拘束圧が同じであれば，静止土圧係数が異なっても，動的変形特性，いわゆる G-γ，h-γ関係は変わらない．

② しかし，静止土圧係数の値によって，応力－ひずみ関係は異なる．

つまり，G-γ，h-γ関係は，非線形解析に用いる応力－ひずみ関係を与えるものとしては情報が不足している．また，これまで普通に行われている，不撹乱試料を採取し，動的変形を行って G-γ，h-γ関係を求め，解析する方法は，初期鉛直上載圧を等方に加えるため，①の条件を満たしていない．（この点からも，既往の一次元解析は間違っていると言える）

ここでは，②について議論する[99]．議論の趣旨は，K_o

が1で無いことにより初期せん断が作用しているとすれば，初期剛性も弾性剛性より小さく，従って変位も大きいと言うことである．

筆者は，この様な実験事実を満たすことの出来る構成則を開発し，ケーススタディを行ってみた．図-7.21と図-7.22は有効上載圧を同じとし，K_oを1（初期等方応力状態）と0.5（初期異方応力状態）にした解析結果である．両者は応力－ひずみ関係も異なっており，最大値も異なっているので，K_oを正しく考慮することの重要性が分かる．ここで，もう一つの計算を行った．それは，初期異方応力状態の地盤に最初にこれまでの計算に用いた地震の2倍の地震を加え計算を行った後，同じ地震を作用させたものである．すると，二度目の地震に対する応答は初期等方応力状態に対するものと同じになった．

図-7.23は同じ大きさの地震を何度も受ける事を想定したシミュレーションである．最初の地震に対しては，初期等方応力状態の結果と非常に異なっているが，地震が繰り返される度に応力－ひずみ関係は初期等方応力状態の結果に近づいていく．

これから，次のような結論が導ける．まず，応力の初期異方性を考慮することは重要である．しかし，何度も地震を受けたり，過去に大きな地震を受けたりすると，その挙動は等方応力状態の結果に近づいていく．従って，実地盤では，埋立で作ってまだ地震の洗礼を受けていないような若い地盤では，初期異方性を考慮が重要であるが，何度も地震を受けたであろう古い地盤では重要ではないと言うことになる．

所で，一次元解析では，この様な効果を考慮することは出来ない．また，二次元解析でも，初期応力状態を等方にして行うことは多々ある．有効応力解析が行われるのは，埋立地が多い．つまり，初期異方性の考慮が重要な所である．この様な効果は考慮されているのであろうか？　ちなみに，実用と言うことを考えると，静止土圧係数を求めることが困難で，この効果を考慮することは容易ではない．

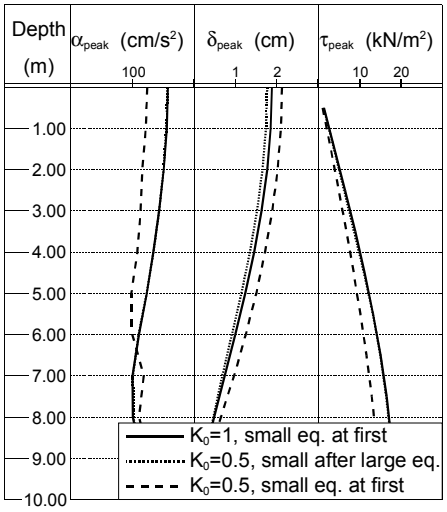
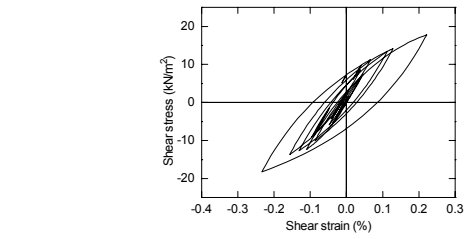
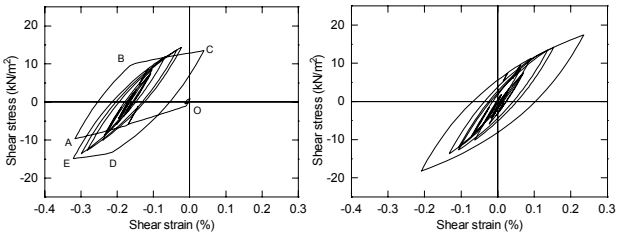


図-7.21　最大応答値

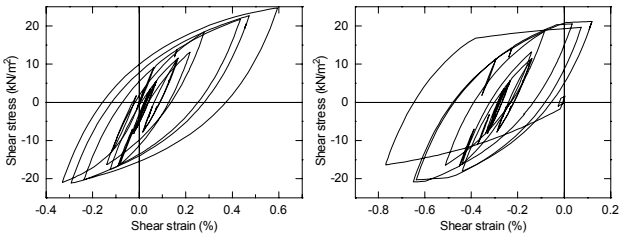


(a) 初期等方応力状態

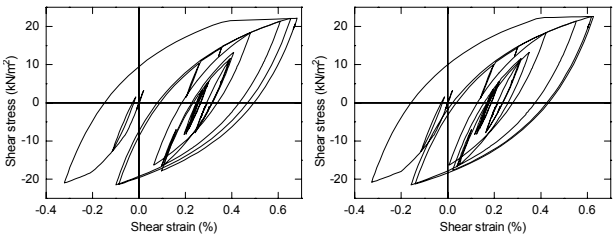


(b) 初期異方応力状態　　(c) 初期異方応力状態：大地震後）

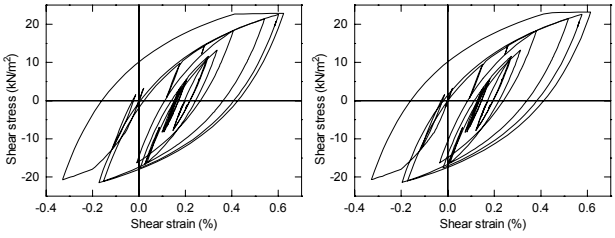
図-7.22　応力－ひずみ関係



(a) 初期等方応力状態　　(b) 一回目



(c) 二回目　　(d) 三回目

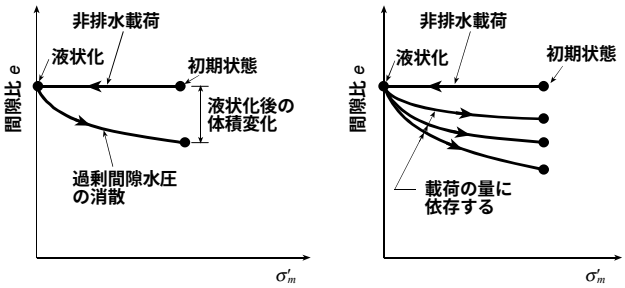


(e) 四回目　　(f) 五回目

図-7.23　繰返し地震を受ける際の応力－ひずみ関係

7.7　過剰間隙水圧消散に伴う沈下は予測できない

図-7.24(a)は，液状化に伴う体積変化に関する，教科書に出てくるような模式図である．図で初期状態として示したのが地震前の状態である．地震中には非排水条件が成立するとすれば，体積は変わらないので間隙比も変わらず，有効拘束圧のみが減少するので，状態点は左に移行し，液状化に至る．液状化が終わって過剰間隙水圧が消散すると，有効拘束圧が増加すると共に，間隙比が小さくなり，体積が縮小するので，状態点は右下に移行する．地震前後の間隙比の変化が，過剰間隙水圧の消散に伴う体積変化である．



(a) 既往のイメージ　　(b) 新しいイメージ

図-7.24　液状化に伴う体積変化の模式図

過剰間隙水圧消散の過程では大きなせん断変形が起こることが無いと考え，ここでは体積変化だけを考える．体積変化モデルについては， 2.2(2)項で説明したし，この前の「地震応答解析に用いる地盤物性」でも紹介した．モデルには大きく二つあり，一つは図-7.24の平面上で直線，すなわち有効拘束圧に比例するもの，もう一つはせん断弾性定数と同じく拘束圧のべき（約0.5）に比例するものである．いずれにしろ，この関係は，次のように書ける．

$$d\sigma'_m = K_0 \sigma'^n_m d\varepsilon_v \tag{7.2}$$

ここで，K_0は材料に固有の定数である．すると，過剰間隙水圧の消散に伴う体積変化は，これを積分して求まり，次のようになる．

$$\varepsilon_v = \int_0^{\sigma'_{mo}} \frac{1}{K_0 \sigma'^n_m} d\sigma'_m \tag{7.3}$$

すなわち，体積変化は，過剰間隙水圧が消散した後の有効拘束圧により一意的に決まる．

ところで，図-7.25は非排水状態で砂に地震に相当するようなランダムなせん断応力を作用させ，その後過剰間隙水圧を消散させたときの体積変化を求めた実験の結果である[100]．図は相対密度 D_rが同じ，つまり同じ試料でも F_L の値が異なれば，過剰間隙水圧消散に伴う体積変化が異なることを示している．すなわち，液状化して，さらに載荷されると，体積変化が多く起こるわけである．これを模式的に示したのが，図-7.24(b)である．

構成則で，この様な効果を考慮していないものでは，過剰間隙水圧の消散に伴う体積変化（つまり地表の沈下）は合うはずがないわけである．仮にあったとしてもそれはたまたまである．

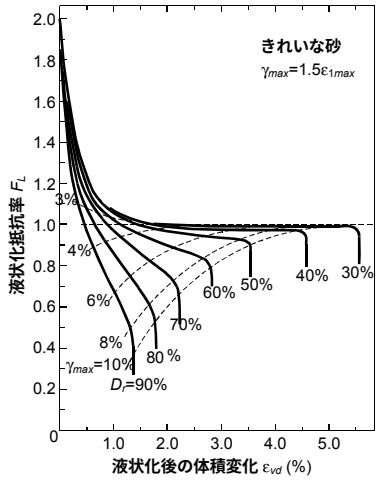


図-7.25　過剰間隙水圧消散に伴う体積変化

液状化前後で体積変化特性が異なるとすれば，いつ変わるのかというのは非常に興味ある事と考えられる．筆者は，非排水条件下の実験からダイレタンシーによる体積ひずみと圧密による体積ひずみを分離することにより，この様な体積変化特性は液状化に至る前の載荷中に徐々に生じていることを示し，この様な体積変化特性をモデル化する方法を示している[101]．興味のある方は参照されたい．

なお，図-7.25は中空ねじり試験でランダムな載荷を行った場合の結果である．筆者は同じ様な実験を三軸試験で一定応力振幅で行ったところ[102]，傾向は同じだが，絶対値は若干異なる結果を得た．これから考えると，液状化後の載荷の程度を F_Lで表現することは問題があるかもしれない．

7.8　液状化強度しか見なくて大丈夫ですか

全応力地震応答解析では，動的変形特性，つまり G-γ 関係と h-γ関係を一致させることが重要である．とすれば，有効応力解析でもこれは重要であるはずである．しかし，有効応力解析の論文を見ると，余り動的変形特性については書いていないものが多い．液状化解析では，液状化の発生を予測することが最も重要である．従って，パラメータは液状化強度に着目して決められ，それが示されているだけのものが多い．筆者の経験でも，動的変形特性と液状化特性の両方は相互に関連しあっており，両方を合わせるのは困難な事も多い．

しかし，これに関しては最近はましになってきたと考えている．今でも多いが，構成則を提案するような論文では，図-7.4に示したような応力経路と応力－ひずみ関係（それも，図のように多くの繰返しではなく，サイクリックモビリティに入って少しだけ）が一致することを検証にしているものが多い．また，初期応力状態では，等方応力状態という，最も単純なものだけが示されていることも多い．

一つの応力振幅でのシミュレーション結果が仮に良かったとしても，振幅を変えたときにも同じ様に結果が良いという保証はない．地震動がランダムであることを考えれば，どの振幅でも良い結果を出すような構成則である必要がある．最低でも，図-7.5に示したような液状化強度は合っていないと，有効応力解析で液状化発生の予測は困難である．出来れば，これに繰返しに伴う過剰間隙水圧上昇の程度まで一致させる事が好ましいが，ここまで制御できる構成則は，筆者の知っている限りではほとんど無い．

液状化のシミュレーションでは，液状化強度特性をターゲットにと言う習慣が始まったのは，地盤工学会で行った一斉解析[4)]が契機であった様に思う．また，この際，多くの構成則が要素試験もシミュレーション出来ないことが分かり，その後改良が加えられるようになったことは既に述べたとおりである．

前置きが少し長くなったが，ここで論じたいことは少し異なる．図-7.26は液状化に伴う流動に関する一斉解析の際の要素試験のシミュレーションの結果の例[103)]である．二つの構成則は，7.1節で示した液状化の起こらない構成則とは異なり，ひずみで定義した液状化もきちんと起こっており，これに基づく液状化強度曲線のシミュレーションでもほとんど同じ様な結果となっている．しかし，二つを比べてみると，一方は繰り返す度に大きくなるひずみの程度がそれほど変わらないのに対し，一方は急激に大きくなるので，液状化前の挙動も異なるし，液状化以後の挙動は相当異なるものとなる．図-7.4と比較してみると，実挙動は両方の中間にあるようで，この二つが両極端となっているようである．

このことは，先にも述べたように，液状化に関するパラメータの設定は，液状化強度曲線が上手くシミュレート出来ていれば万全のような印象があるが，実は，液状化強度曲線のシミュレーションは最低条件であり，挙動全体を把握できるようにするためには，別の視点からの挙動シミュレーションも必要であることを意味している．現在の所，ここまで踏み込んだ論文は見あたらないが，今後，この様な研究も進んで行くことと考えられる．

7.9 非排水条件は成立しない

地震時には，地震の継続時間が短く，従って，その間に移動する水量が非常に小さいとして非排水条件が仮定されることが多い．非排水条件しか出来ないプログラムもある．図-3.2に示したように，非排水条件を支配方程式とするのであれば，水と土の連成を考える必要が無くなり，プログラムは非常に簡単になる．例えば，FLIP では，土骨格に相当する要素と，水に相当する要素を重ね合わせることで，全応力解析プログラムで，非排水条件下の有効応力解析を実現している．

図-7.27は有効応力解析の非排水条件の妥当性を検証するために行った計算の例である[104)]．これによれば，非排水条件では各要素のせん断応力履歴のみで過剰間隙水圧の値が決まり，ばらつくことがあるのに対し，排水条件ではこれを均一化するような水圧となっている．有効応力の原理が成立するとすれば，この様な過剰間隙水圧の差は，無視できるとも思えない．どうしてこの様に挙動が違うかというと，確かに地震の継続時間は短いので，水が流れる量は小さいが，一方では水の体積弾性係数は非常に大きいので，水の流出量（実際にはこれによる体積変化）と水の体積弾性係数の積で表される水圧の変動は無視できないオーダーとなるからである．

この様な論文も，読む際には注意が必要である．確かに，図-7.27に見られるように，水圧の差は小さくない．しかし，これが，例えば最大加速度の様な，ユーザーが最も関心を持っている事項に与えるにどれだけ影響を与えるかと言うことは，これからは分からないわけである．場合によっては影響は小さいのかもしれない．この辺は

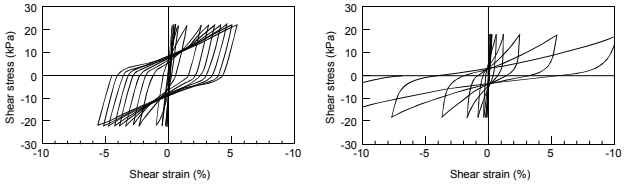


図-7.26　二つの構成則の応力－ひずみ関係[103)]．液状化強度曲線に対するシミュレーションは両方ともほとんど同じである．

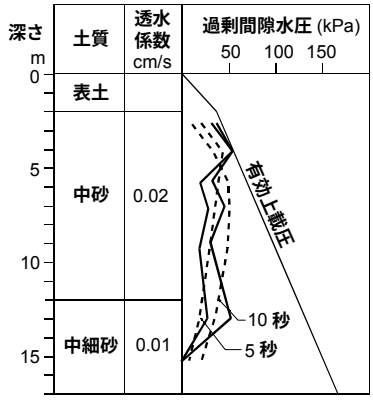


図-7.27　排水条件の違いによる過剰間隙水圧の差

ユーザーが自分で確かめるしか無い事項であるかもしれない．

排水と非排水については，もう一つ興味深い計算結果がある[105]．非排水条件で計算を行うと，主要動が終わった後も次第に変形が増大するというものである．これは，過剰間隙水圧の消散過程では，全ての要素で有効拘束圧が増えるのではなく，消散の途中にある要素では，逆に流入する水によって有効拘束圧が減少するので，変形が増えるためと考えられる．二次液状化は丁度この様な現象を指しており，従って，液状化対策の範囲などを議論する際には，排水条件の解析が必要となってくる．

別の問題もある．例えば，非排水状態でダイレタンシーにより過剰間隙水圧が発生した結果起こった有効拘束圧の減少と，周辺から流入してきた水圧によって生じた有効応力の減少が，応力－ひずみ関係に同じように影響するかという問題である．これについては7.1節で少し述べたが，特に間隙水の流入，その際の浸透圧よる土骨格の乱れと．その影響についての研究はほとんど無い．

7.10　二度間違えれば，正しくなる

イメージとしてわかりやすいので，経験的ダイレタンシー則を用いる構成則を例に取る．応力－ひずみ関係は次のように表される．

$$d\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}(d\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{m}d\varepsilon_{vd}) \tag{7.4}$$

非排水条件下では $d\varepsilon_v$=0であるので，ダイレタンシーに伴う有効応力の変化量 $d\sigma'_m$ は，次式となる．

$$d\sigma'_m = -Kd\varepsilon_{vd} \tag{7.5}$$

すなわち，液状化の解析がきちんと行われるためには，体積弾性係数 K とダイレタンシーに伴う体積ひずみの発生量の両方が正しく計算されている必要がある．しかし，「地震応答解析に用いる地盤物性」で説明したように，体積弾性係数の評価は容易ではない．また，7.7節で述べたように，体積弾性係数の値は繰返し載荷に伴って変化するが，そのような現象を考慮した構成則はほとんど無い．従って，厳密に言うとほとんどの液状化解析では体積弾性係数が正しいという保証がない．とすれば，多くの液状化解析は間違えているのだろうか？

式(7.4)や(7.5)の $d\varepsilon_{vd}$ は実際に発生するひずみではない．実現象の把握に必要なのは，$d\varepsilon_{vd}$ ではなく，これによる有効応力の変化量である．従って，実務ではもう一度間違えるのが実用的である．つまり，有効応力の変化量が求める値になるように，ダイレタンシーモデルをいじれば良いのである．

構成則に関する論文では，パラメータの決定は簡単なように書いてあることが多い．例えば，内部摩擦角とダイレタンシー角の様にある試験をして，それを使えばよいと言うわけである．しかし，筆者の経験によれば，実際にそのように簡単であった事は多くない．着目する対象によって合わせたい所も異なる．従って，その部分がより良くなるように，場合によっては内部摩擦角のような物理量も変更することもある．液状化解析には，この様な判断が数多く要求される．

理論的には，この項で述べたような処置は間違いであると言える．しかし，実用を考えるとき，必要な現象に着目し，それが一致するようにパラメータを調整する事は必要なことである．

ここに示した事は一例である．個々の要素を完全に押さえ，その総計として全体挙動が説明できることは理想であるが，現状ではそのレベルには達していない．従って，実務では，重要なものを抽出する判断力が必要となる．

7.11　どこまで有効応力解析に期待するのか

図-7.28は，1993年釧路沖地震の際に発生した盛土の崩壊を解析した結果である[106]．盛土は図-7.29に示したように，大きく下流部に崩壊し，盛土部には多くの亀裂も見える．解析は，地下水位以下の盛土が完全に液状化し，大きな変位が発生している．従って，解析は実現象を良く説明できたといえる．

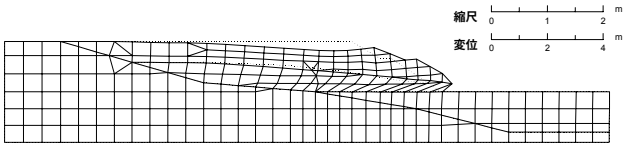


図-7.28　変位図

図-7.29　盛土の被害の状況

この様な観点から見れば，この解析に対して非常によい評価をすることもできる．しかし，筆者らはもう一歩つっこんでみた．実際の崩壊は，下流のピート部を含む円弧滑り状をしているのに対し，解析はそうではない．

また，解析では，液状化層とその下部の層で節点を共有しているため，変形形状がおかしい．など，合わないところもある．

節点共有の問題は常にある．この例では，ジョイント要素を入れれば解決できると考える人もいるかもしれないが，それは間違いである．ジョイント要素はジョイントの軸方向に動くので，直線的な滑りが発生するときには威力を発揮するかもしれないが，この例のように滑りが直線で無いときには上手くすべらない．

亀裂も問題である．盛土が崩壊を始めると，亀裂が発生する．すると，そこから水が抜けるので，発生した過剰間隙水圧は急速に消散し，液状化を維持することは無いであろう．

有効応力解析は，本質的に連続体を仮定している．従って，この様な連続体の仮定が崩れるような事態は解析出来ないと考えるのが妥当であろう．そうはいっても，例えばサンフェルナンド地震の際生じた Lower San Fernando ダムの被害の変形が合ったというような論文も無いわけではないが，筆者はいつも疑問に思っている．もちろん，合わせたいと思えば，合わせる事は出来るかもしれない．しかし，不連続性の問題をどのように解決するかを示さない限り，その方法が有効とは考えにくい．

図-7.30はフィリピンルソン島地震の際に起こった建物の沈下である．これも現在の液状化解析では評価することが困難な現象に見える．液状化が発生して，構造物が支持力を失う所までの解析は可能であろう．しかし，図-7.30の様な状況になるためには，建物が地面の中に貫入していく必要がある．このためには，構造物直下の地盤が側方に回り込み，さらには構造物の沈下に伴い相対的に上に動く必要もある．この様な大変形は現在の有効応力解析ではとても困難である．同様な現象に石油貯槽タンクの沈下などもあるが，沈下量が合ったという報告があっても，筆者は信用しないことにしている．

この様な問題に関しては，通常の有限変形理論，例えば updated Lagrangian[107]では扱うことが出来ない．貫入の問題について, Eulerian を用いて成功している例もあるが，有限の液状化層厚に対してこの様な手法の適用は困難である．ALE 法[108]に関する研究が最近行われるようになってきており，将来的な望みは無いわけではない．また，流体としての解析も試みられるようになってきている（例えば文献109）．さらに，DEM による手法も従来の定性的なレベルを脱皮しようとしている（例えば文献110）．将来性のある分野かもしれない．

図-7.30　液状化に伴う建物の沈下

8 おわりに

この報告では，有効応力解析に関するかなり広い理論的な扱いを示した後，特に7章で現在の有効応力解析が抱えている問題点を示した．7章，特に構成則については，書いて行くうちに更に多くの要因が出てきたが，ページの都合もあり，全てを書くことは出来なかった．

最初に示したように，筆者は有効応力解析は実用的にも役に立つ武器であると思っている．5章では液状化が問題となる部分では全応力解析に比べれば格段に現象を説明できることを示した．また，有効応力解析に関する多くの論文が有効応力解析が有効であることを示している．

しかし，有効応力解析は簡単に扱える武器ではないことも事実である．その使い方は非常に難しく，あるプログラムを使ったら何でも出来るとか言うものではない．また，一つの現象に対して一つの手法で全てが説明できるわけでもない．着目点を決め，それが一番良く表現できるプログラム，モデル化を選定し，さらに計算結果も慎重に判断する必要がある．

この様な作業は非常に困難である．そのかわり，実用的な観点から言えば，次のようなことが言える．すなわち，自分がある問題を解いたとする．すると，それと同じ様な問題に関しては，かなり良い精度が期待できる．従って，有効応力解析を行おうとする者は，自分の持っている武器で，なるべく多くの例を解き，合わせるための努力をすべきである．その経験が，未知の問題に対して精度良い結果を得るための有力な武器となることを信じている．

一般的に言って，有効応力解析を液状化発生の予測に使うのであれば，注意深く解析を行えば，かなりの精度で予測することは可能であろう．これに対して，液状化以後の振動性状を求めるのであれば，相当の努力が必要となろう．変位の問題はかなり難しい問題の様に見える．また，地盤は液状化すると，流体のように挙動する事もあるが，この様な現象までを現在の有効応力解析に求めることは無理であろう．地盤の変位が非常に大きくなる問題，亀裂などにより不連続が発生する問題，液状化地盤中に構造物が沈下したり浄化槽が浮き上がったりする

様な流体的な現象も定量予測が困難な現象であろう．

有効応力解析がこの様に難しい理由の最大の理由は構成則の不備であると考えている．また，特に，有効拘束圧がほとんど0になる近傍では，実現象に対する理解も十分とは言えない面があるように考えられる．さらに，この付近の現象については，固体の力学に基づく解析法のみならず，流体としての扱いも考慮できるような手法も必要となろう．これらについては，今後の発展を期待したい．

例で示したように，構成則は，名前は同じでもどんどん変わっている．そして，構成則作りに携わった事のある筆者の感じを言わせてもらえれば，目的に応じて（理論的に美しくなければ）構成則を改良することはそれほど困難な事ではない．一般に日本のユーザーは権威に頼る傾向が強いように思う．例えば，高名な構成則を使ったから結果が正しいと言う様な使い方がされることも多いように感じている．これとは逆に，ユーザーの立場として，構成則に不足していること，改良して欲しいことを要求していけば，もっと改善できる可能性は高いと考える．

一般の技術者にとっては，実際の設計では有効応力解析をどう使うのか，と言うことが問題であろう．先にも述べたように，有効応力解析を使うためにはかなりのトレーニングが必要である．この過程で，有効応力解析に期待できることも，限界も見えてくると思う．後は自分の判断に従って，使うだけである．

一方，筆者のような研究者側から言うと，有効応力解析に一般の技術者がどの程度の精度を求めているのか分からない．これまでに何度も述べたように，有効応力解析に完全を求めるのは酷である．筆者は，機会のあるごとに，一般の設計者や技術者にこの質問をしているが，きちんとした返事が返ってきた試しがない．

返事が困難な所もあると推定できる．例えば静的な解析であれば，変位が何%合ったとか，解析の評価をする比較的客観的な指標がある．しかし，有効応力解析では要求されるものが多岐に渡っている．時刻歴波形は適切な指標が無いため，客観的な評価は困難である（従って，どんな解析でも合ったと言える便利なものではあるが）．最大加速度が合えば良いのか，速度なのか，変位なのか，それともスペクトル特性なのか，応答スペクトルなのか，また，スペクトルの様なものは時刻歴と同じく，その内のどれに着目するかという問題もある．この全部が合わないとすれば，どれに着目すべきか．それはおそらく対象としている構造物，また，解析結果の使い方によって変わるものであろう．

有効応力解析の精度を論じるには，そのユーザーである一般技術者との対話が必要であろう．

実用的な液状化解析という観点で見ると，日本で一つの大きなイベントは，これまでにも度々引用した，地盤工学会で行われた一斉解析[4]であった様に思われる．この一斉解析には筆者も参加しているが，かなり内容に踏み込んだ議論が出来たように思う．液状化強度でパラメータを合わせるべきだという共通の認識が出来てきたのもこの議論を通してであったように思う．また，弾塑性型の構成則の不備が明らかになって，その後の発展に繋がったことは既に述べたところである．今後も，この様な一斉解析が度々行われることが，有効応力解析全体の精度の向上には不可欠のように思われる．

これに比べれば，ブラインドテストは少し落ちる．それは，まず第一に，解析結果が良かったのは，プログラムが良かったのか，技術者の判断力が良かったのか，それともたまたまであったのか分からないからである．そして，第二に，きちんとした議論が行われないため，知識の向上にはならないからである．そのような場を設けようとしても，ブラインドテストでは，原因がどのようなものであれ，結果と合っていた人が勝者で，どんなに理屈が正しくても合わなかった人は敗者である．この両者でまともな議論が行われると期待することは出来ない．また，合った原因が何であれ，最終的にはプログラムが良かったと言うことになり，以後，そのプログラムを使ったことが正しい結果を出しているという，実務で良くある錯覚を生じさせ易いという欠点もある．

参考文献

1) Saada, A. and Bianchini, G. S. ed. (1987): Proc. Int. Workshop on Constitutive Equation for Granular Non-cohesive Soils, Case Western Reserve University, Cleveland
2) Midorikawa, S. (1992): A statistical analysis of submitted predictions for the Ashigara Valley blind prediction test, Proc., Int. Symp. On the Effect for the Surface Geology on Seismic Motion, Odawara, Japan, Vol. 2, pp. 65-77
3) Arulanandan, K. and Scott, R. F. ed (1993): Proc. International Conference on the verification of Numerical Procedures for the Analysis of Soil Liquefaction Problems, Davis, California
4) 石原研而 他（1989）：地盤および土構造物の有効応力解析，「地盤と土構造物の地震時挙動」に関するシンポジウム発表論文集，土質工学会，pp.50-136
5) 井合進 他（1993）：液状化に関する一斉解析，地盤の液状化対策に関するシンポジウム，土質工学会，pp.77-190
6) 土質工学会編（1982）：土質工学ハンドブック，土質工学会，p.22
7) Lambe, T. W. and Whitman, R. V. (1979): Soil Mechanics, SI Version, John Wiley and Sons, pp. 241-242
8) Towhata, I. (1989): Models for cyclic loading, Mechanics of granular materials, Report of ISSMFE Technical Committee on Mechanics of Granular materials, ISSMFE, pp.80-90

9) 吉国洋（1982）：土の圧縮と圧密，土質工学ハンドブック，土質工学会，pp. 147-221
10) 国生剛治，桜井彰雄（1979）：MODIFIED HARDIN-DRNEVICH モデルについて，土木学会第 33 回年次学術講演会講演概要集，第Ⅲ部門，pp. 1181-1184
11) Kondner, R. L. (1963): Hyperbolic Stress-strain Response; Cohesive Soils, Proc. ASCE, SM1, pp. 115-143
12) Lee, M, K, W, and Finn, W. D. L. (1978): DESRA-2, Dynamic Effective Stress Program for Earthquake Response Analysis of Soil Deposits with Energy Transmitting Boundary Including Assessment of Liquefaction Potential, The University of British Columbia, Faculty of Applies Science, Revised in 1985
13) 吉田望（1996）：地盤物性の動特性モデル，入門・建物と地盤との動的相互作用，日本建築学会，pp. 236-260
14) Jennings, P. C. (1964): Periodic Response of a General Yielding Structure, Proc. ASCE, EM2, pp. 131-163
15) Hardin, B. O. and Drnevich, V. P. (1972): Shear Modulus and Damping in Soils: Design Equations and Curves, J. SMFD, Proc., ASCE, Vol. 98, No. SM7, pp. 667-692
16) Ishihara, K. and Towhata, I. (1980): One-dimensional Soil Response Analysis during Earthquake Based on Effective Stress Method, Journal of the Faculty of Engineering, Vol. XXXV, No. 4, The University of Tokyo, pp. 656-700；東畑郁生，吉田望（1991）：YUSAYUSA-2，理論と使用法，佐藤工業（株）
17) Martin, G. R., Finn, W. D. L., and Seed, H. B. (1975): Fundamentals of Liquefaction under Cyclic Loading, FED, ASCE, Vol. 101, No. GT5, pp. 423-438
18) Byrne, P. M. (1991): A cyclic shear-volume coupling and pore pressure model for sand, Proc., 2nd International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics, University of Missouri, Rolla, Vol. 1, p. 47-56
19) Finn, W. D. L. and Bhatia, S. (1980) : Endochronic theory of sand liquefaction, Proc. 7WCEE, Vol. 3, pp. 149-155
20) Zienkiewicz, O. C., Leung, K. H., Hinton, E., and Chang, C. T. (1982): Liquefaction and permanent deformation under dynamic conditions - numerical solution and constitutive relations, Soil Mechanics - Transient and Cyclic Loads, Pande, G. N. and Zienkiewicz, O. C. ed., John Wiley and Sons, pp. 71-103
21) Finn, W. D. L., Yogendrakumar, M., Yoshida, N. and Yoshida, H. (1986): TARA-3, a program for nonlinear static and dynamic effective stress analysis, Soil Dynamic Group, University of British Columbia, Vancouver
22) 福武毅芳，大槻明（1993）：ALISS による解析，地盤の液状化対策に関するシンポジウム，土質工学会，pp. 125-134
23) Towhata, I. and Ishihara, K. (1985): Modelling soil behavior under principal stress axes rotation, Proc. 5th International Conference for Numerical Method in Geomechanics, Nagoya, Vol. 1, pp. 523-530
24) Iai, S. (1991): A strain space multiple mechanism model for cyclic behavior of sand and its application, Earthquake Engineering Research Note No. 43, Port and Harbor Research Institute, Ministry of Transport, Japan
25) 沿岸開発技術研究センター（1997）：液状化による構造物被害予測プログラム FLIP 取扱説明書
26) 福武毅芳（1997）：土の多方向繰返しせん断特性を考慮した地盤・構造物系の三次元液状化解析に関する研究，ORI 研究報告 97-03，清水建設株式会社
27) Yoshida, N., STADAS, A computer program for static and dynamic analysis of ground and soil-structure interaction problems, Report, Soil Dynamics Group, The University of British Columbia, Vancouver, Canada, 1993
28) Ishihara, K., Yoshida, N. and Tsujino, S., Modelling of Stress-strain Relations of Soils in Cyclic Loading, Proc. 5th International Conference for Numerical Method in Geomechanics, Nagoya, Vol. 1, pp. 373-380, 1985
29) 吉田望，辻野修一，石原研而：地盤の１次元非線形解析に用いる土のせん断応力－せん断ひずみ関係のモデル化，日本建築学会大会学術講演梗概集（中国），pp. 1639-1640，1990
30) Tsujino, S., Yoshida, N. and Yasuda, S. (1994): A simplified practical stress-strain model in multi-dimensional analysis, Proc., International Symposium on Pre-failure Deformation Characteristics of geomaterials, Sapporo, pp. 463-468
31) Yoshida, N. (1996): Initial Stress Effect on Response of Level Ground, Proc, Eleventh World Conference on Earthquake Engineering, Acapulco, Mexico, Paper No. 1023
32) Pradhan, T. E. B. (1990): The behavior of sand subjected to monotonic and cyclic loadings，京都大学学位論文
33) Towhata, I. and Ishihara, K. (1985): Shear work and pore water pressure in undrained shear, Soils and Foundations, Vol. 25, No. 3, pp. 73-84
34 井合進（1988）：液状化の二次元有効応力解析において破綻しない為の工夫をした一つのモデル，土木学会第 43 回年次学術講演会，第 3 部，pp.418-419
35) 阿部博，千明一生，三田茂，渡邊直哉（1997）：兵庫県南部地震で被災した高速道路盛土の液状化解析，第 32 回地盤工学研究発表会，pp.1031-1032
36) Nishi, K. and Esashi, Y. (1978): Stress-strain relationship of sand based on elasto-plastic theory, Proc., JSCE, No.280, pp.111-122
37) 金谷守，西好一，当麻純一，大波正行（1994）：有効応力に基づく地盤の非線形解析手法の開発とその検証，土木学会論文集，No.505/III，pp.49-58
38) 八島厚，岡二三生，柴田徹，渦岡良介（1993）：LIQCA による解析，地盤の液状化対策に関するシンポジウム，土質工学会，pp. 165-174
39) Tobita, Y. and Yoshida, N. (1994): An isotropic bounding surface model for undrained cyclic behavior of sand: Limitation and Modification, Proc., International Symposium on Pre-failure Deformation Characteristics of geomaterials, Sapporo, pp. 457-462
40) 福武毅芳，大槻明（1988）：任意応力条件下の繰返しせん断と液状化解析，土木学会論文集，第 400 号／Ⅲ-10，pp.103-112
41) 伊藤浩二：動的有効応力解析プログラム「EFECT」（その 1）－基礎理論と地盤構成モデル－，大林組技術研究所報，No.51，pp.7～14，1995
42) 吉田望，辻野修一，石原研而：Multi-Mechanism モデルによる解析，地盤と土構造物の地震時挙動に関するシンポジウム発表論文集，土質工学会，pp. 74-83，1989
43) 粒状体に関する国内委員会（1993)：粒状体の力学，土質工学会，319pp.
44) Satake, M., ed. (1989): Mechanics of granular materials, Report of ISSMFE technical committee on mechanics of granular materials, JSSMFE, 188pp.
45) Biot, M. A. (1941): General Theory of Three-dimensional Consolidation, J. Appl Phys., Vol 12, pp. 155-164
46) Zienkiewicz, O. C. and Shiomi, T (1984): Dynamic Behavior of Saturated Porous Media, The generalized Biot formulation and its numerical solution, Int. J. of Num. and

Applied Method in Geomechanics, Vol. 8, pp. 71-96
47) Kohgo, Y. (1992): Deformation analysis of fill-type dams during reservoir filling, Proc. 4th Int. Symposium on Numerical Models in Geomechanics, NUMOG IV, Vol. 2, pp.777-787
48) Zienkiewicz, O.C., Chang, C. T. and Bettess, P., Drained, Undrained, Consolidation Behavior Assumptions in Soils, Limits of Validity, Geotechnique, Vol. 30, pp.385-395, 1980
49) 吉田望，辻野修一：液状化解析における非排水条件仮定の有効性，第 44 回土木学会年次学術講演会講演概要集，第 3 部，pp. 644-645，1989
50) Sandhu, R. S. and Wilson, E. L. (1969): Finite-element Analysis of Seepage in Elastic Media, Proc., ASCE, Vol. 95, No. EM3, pp. 641-652
51) Christian, J. T. and Boehmar, J. W., Plane strain consolidation by finite elements, Proc., ASCE, Vol. 96, No. SM4, pp.1435-1457, 1968
52) 赤井浩一，田村武（1976）：弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析，土木学会論文報告集，第 269 号，pp. 95-104
53) Yoshida, N. (1993): STADAS, A computer program for static and dynamic analysis of ground and soil-structure interaction problems, Report, Soil Dynamics Group, The University of British Columbia, Vancouver, Canada；吉田望，辻野修一：有効応力に基づく総合地盤解析プログラム「STADAS」の開発 －その１　基礎式－，佐藤工業（株）技術研究所報，No. 18，pp. 107-115，1992
54) Zienkiewicz, O.C., Chang, C. T. and Bettess, P., Drained, Undrained, Consolidation Behavior Assumptions in Soils, Limits of Validity, Geotechnique, Vol. 30, pp.385-395, 1980
55) Schnabel, P. B., Lysmer, J. and Seed, H. B. (1972): SHAKE A Computer program for earthquake response analysis of horizontally layered sites, Report No. EERC72-12, University of California, Berkeley
56) 戸川隼人（1975）：有限要素法による振動解析，サイエンス社
57) Lysmer, J., Udaka, T., Tsai, C.-F. and Seed, H. B. (1975): FLUSH a computer program for approximate 3-D analysis of soil-structure interaction problems, Report No. EERC75-30, University of California, Berkeley
58) Cook, R. D., Malkus, D. S. and Plesha, M. E., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Third edition, John Wiley & Sons, 1989
59) Lysmer, J., Udaka, T., Tsai, C.-F. and Seed, H. B. (1975): FLUSH a computer program for approximate 3-D analysis of soil-structure interaction problems, Report No. EERC75-30, University of California, Berkeley
60) 大崎順彦（1994）：新・地震動のスペクトル解析入門，鹿島出版会
61) Souza, A.F.D and Garg, V.K. (1984): Advanced dynamics, modeling and analysis, Prentice-Hill, pp.213-227
62) Gudehus, G. ed., Finite Elements in Geomechanics, John Wiley & Sons, 1977：日本語訳，川本兆万，桜井春輔，足立紀尚，地盤力学の有限要素解析　1，2，森北出版，1981
63) Gudehus, G. ed., Finite Elements in Geomechanics, John Wiley & Sons, 1977：日本語訳，川本兆万，桜井春輔，足立紀尚，地盤力学の有限要素解析　1，2，森北出版，1981
64) 大崎順彦（1994）：新・地震動のスペクトル解析入門，鹿島出版会
65) Martin, P.P. and Seed, H.B. (1978): MASH, A computer program for the non-linear analysis of vertically propagating shear waves in horizontally layered deposits, Report No. YCB/EERC-78/23, University of California, Berkeley
66) Martin, P.P. and Seed, H.B. (1978):APPOLO, A computer program for the analysis of pressure generation and dissipation in horizontal sand layers during cyclic or earthquake loading, Report No. YCB/EERC-78/21, University of California, Berkeley
67) 日本建築学会（1987）：地震荷重　その現状と将来の展望，丸善，438p.
68) Cohen, M. and Jennings, P.C., Silent Boundary for Transient Analysis, Computational Methods for Transient Analysis, Elsevier, pp.301-360, 1983
69) Smith, W. D., A Nonreflecting Boundary for Wave Propagation Problems, Journal of Computational Physics, Vol. 15, pp.492-503, 1974
70) Kunar, R.B. and Rodrigue-Ovejero, L. A., A Model with Non-reflecting Boundaries for Use in Explicit Soil-Structure Interaction Analysis, Earthquake Engineering Structural Dynamics, Vol. 8, pp.2328-2331, 1980
71) Joyner, W.B., a Method for Calculating Nonlinear Response in Two Dimensions, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 65, No. 5, pp.1337-1357, October 1975
72) Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R. L., Finite Dynamic Model for Infinite Media, Journal of Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, Vol. 95, No. EM4, 1969, pp.859-877
73) Clough, R. W. and Penzien, J. (1975): Dynamics of Structures, McGraw-Hill Kogakusha, Tokyo
74) 田中勉，吉田望，亀岡裕行，長谷川豊：地中構造物の多入力解析，第 38 回土木学会年次学術講演会講演概要集，第 1 部，pp.49-50，1983
75) 東平光生，吉田望：時間領域の有限要素法と境界要素法の結合解析による地盤振動解析，土木学会論文集，第 410 号/Ⅰ-12，pp.395-404，1989
76) 杉戸真太，合田尚義，増田民夫（1994）：周波数特性を考慮した等価ひずみによる地盤の地震応答解析法に関する一考察，土木学会論文報告集，No. 493，pp. 49-58
77) 酒井久和，澤田純男，土岐憲三（1997）：時間領域での基盤入力地震動の推定法に関する基礎的研究，土木学会論文集，No. 577, pp. 53-64
78) 吉田望（1994）：実用プログラム SHAKE の適用性，軟弱地盤における地震動増幅シンポジウム発表論文集，pp.14-31
79) 吉田望，末富岩雄，加藤伸英，三浦均也（1997）：地震応答解析における等価線形法の有効性に関するパラメータスタディ，第 32 回地盤工学研究発表会講演集，pp. 877-878
80) 戸川隼人（1975）：有限要素法による振動解析，サイエンス社
81) 武藤清，小林俊夫（1977）：原子炉施設の耐震設計に慣用されている各種減衰理論の比較，日本建築学会論文報告集，第 255 号，pp.35-45
82) 吉田望，田蔵隆，鈴木英世（1995）：地盤の非線形地震応答解析手法の比較，第 23 回地震工学研究発表会，土木学会，pp.49-52
83) Tatsuoka, F. and Shibuya, S. (1992): Deformation characteristics of soils and rocks from field and laboratory tests，生産技術研究所報告，東京大学，第 37 巻，第 1 号，pp. 1-136
84) Ishihara, K. (1982): Evaluation of soil properties for use in

earthquake response analysis, Proc., Int. Symp. on Numerical Models in Geomechanics, Zurich, pp. 237-259
85) 吉田望，末富岩雄（1996）：DYNEQ：等価線形法に基づく水平成層地盤の地震応答解析プログラム，佐藤工業（株）技術研究所報，pp. 61-70
86) ポートアイランド記録（神戸市提供）
87) 吉田望（1995）：1995 年兵庫県南部地震におけるポートアイランドの地震応答解析，土と基礎，Vol. 43，No. 10，pp. 49-54
88) 国生剛治，佐藤清隆，松本正毅，1995 年兵庫県南部地震での非線形震動特性，土と基礎，第 43 巻第 9 号，pp.39-43，1995
89) 谷本喜一，兵庫県南部地震の地盤災害，第 30 回土質工学研究発表会特別セッションにおける講演，1995
90) 海底地盤－大阪湾を中心として，土質工学会関西支部，pp.169-175，1995
91) 小林恒一，吉田望，石井雄輔，伊東浩二，西山高士（1998）：連続地中壁で囲まれた構造物の地震応答解析－全応力解析と有効応力解析の比較－，第 33 回地盤工学研究発表会講演集，pp. 103-104
92) Lysmer, J. *et al*.: A Computer program For approximate3-D analysis of soil－structure interaction problems, EERC Report NO.75/30, UBC, 1975
93) 神戸市開発局：兵庫県南部地震による埋立地地盤変状調査（ポートアイランド，六甲アイランド）報告書，1995
94) 江尻譲嗣，後藤洋三：ポートアイランド鉛直アレー地震観測記録を用いた基盤入射波分離の試み，土木学会第 50 回年次学術講演梗概集Ⅰ，pp.1136～1137
95) 吉田望（1998）：液状化に伴う流動のメカニズム，地震時の地盤・土構造物の流動性と永久変形に関するシンポジウム発表論文集，地盤工学会，pp. 53-70
96) Hamada, M., Yasuda, S., Isoyama, R. and Emoto, K. (1986): Study on Liquefaction Induced Permanent Ground Displacement, Association for the Development of Earthquake Prediction, Tokyo
97) Yoshida, N., Yasuda, S., Kiku, H., Masuda, T. and Finn, W. D. L. (1994): Behavior of Sand After Liquefaction, Proc., 5th U.S.-Japan Workshop on Earthquake Resistant Design of Lifeline Facilities and Countermeasures Against Soil Liquefaction, Salt Lake City, pp. 181-198
98) 建築研究振興協会（1998）：性能評価に基づく各種設計荷重の指針（案）報告書
99) 吉田望（1996）：水平成層地盤の地震応答に与える初期せん断の影響，京都大学防災研究所年報，第 39 号 B-1，pp. 23-35
100) Nagase, H. and Ishihara, K. (1988) : Liquefaction-induced compaction and settlement of sand during earthquakes, Soils and Foundation, Vol.28, No.1, pp. 65-76
101) Peiris, T. A. and Yoshida, N. (1996): Modeling of Volume Change Characteristics of Sand under Cyclic Loading, Proc., Eleventh World Conference on Earthquake Engineering, Acapulco, Mexico, Paper No. 1087
102) 吉田望，辻野修一，稲童丸征巳：液状化に伴う地盤沈下予測に関する基礎的研究，第 29 回土質工学研究発表会講演集，pp. 859-860，1994
103) 金谷守，吉田望（1998）：護岸構造物の地震時挙動に関する一斉実験・解析，地震時の地盤・土構造物の流動性と永久変形に関するシンポジウム発表論文集，地盤工学会，pp. 159-192
104) 吉田望，辻野修一：液状化解析における非排水条件仮定の有効性，第 44 回土木学会年次学術講演会講演概要集，第 3 部，pp. 644-645，1989
105) 王均，佐藤正行，吉田望（1998）：矢板護岸被害の有効応力解析（その 2：排水条件の影響），第 33 回地盤工学研究発表会講演集，pp. 967-968
106) Miura, K., Yoshida, N. and Wakamatsu, K. (1995): Damage to fill embankment during the 1993 Kushiro-oki earthquake, Proc., First International Conference on Earthquake Geotechnical Engineering, Tokyo, pp. 1057-1062
107) 山田嘉昭（1983）：大変形を含む問題，有限要素法ハンドブック II 応用編，培風館，pp. 270-301
108) 野村卓史（1996）：ALE 法，構造工学における計算力学の基礎と応用，pp. 407-416
109) Uzuoka, R., Yashima, A. and Kawakami, T.(1977): An analysis of lateral spreading of liquefied subsoil based on Bingham model，Proc. of Int. Sym. of Numerical Models in Geomechanics, pp.685-690, 1997
110) 中瀬仁，石川博之，武田智吉（1995）：個別要素法による室内せん断試験のシミュレーション，第 24 回地震工学研究発表会講演論文集，pp.489-492